

# THÉORIE GÉNÉRALE DE L'HORLOGERIE

*par*

LÉOPOLD DEFOSSEZ

*Préface d'A. Jaquerod  
Directeur du Laboratoire suisse  
de recherches horlogères*

*Ouvrage publié sous les auspices  
des Ecoles suisses  
d'horlogerie*

TOME PREMIER

*Edité par la*

CHAMBRE SUISSE DE L'HORLOGERIE  
LA CHAUX-DE-FONDS

**Copyright 1950 by La Chambre suisse de l'horlogerie, La Chaux-de-Fonds.  
Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction  
réservés pour tous pays.**



## AVANT-PROPOS

*Il nous appartient moins de présenter un ouvrage qui se recommande de lui-même par ses qualités de clarté et de rigueur scientifiques, que de rendre hommage à ceux dont les initiatives et le travail ont rendu possible cette publication.*

*Consciente de la nécessité pour les élèves de nos écoles techniques de pouvoir constamment se reporter à un manuel, l'Association des directeurs des Ecoles suisses d'horlogerie s'est préoccupée dès 1945 de rééditer le cours d'Horlogerie théorique publié en 1911 et 1912 par Jules et Hermann Grossmann. L'évolution considérable qu'ont subie depuis lors les procédés de fabrication, de même que les importants progrès réalisés dans le domaine de la chronométrie rendaient d'ailleurs indispensable une refonte complète de cet ouvrage capital. Le savant horloger qu'est M. Léopold Defossez a bien voulu assumer cette tâche ingrate et la remplir avec le soin le plus extrême, malgré les nombreux sacrifices qu'elle lui a imposés.*

*Cependant, la mise de fonds qu'exige aujourd'hui l'édition d'un ouvrage comportant environ huit cents pages ne permettait pas à l'Association des directeurs des Ecoles suisses d'horlogerie de mener à elle seule l'entreprise à chef. Les buts mêmes qu'elle s'était assignés lui enlevaient, d'autre part, la faculté de faire supporter les risques de l'opération à une maison d'édition : en raison de sa faible et lente diffusion, l'ouvrage eût été d'un prix inabordable pour les élèves auxquels il était destiné. Face à ces difficultés, l'Association prit l'initiative de s'adresser à la Chambre suisse de l'horlogerie. Et c'est avec joie que nous avons donné suite à cette requête, non seulement parce que c'est dans le rôle de la Chambre d'encourager toute tentative*

*utile au développement général de l'industrie horlogère suisse, mais surtout parce qu'il s'agit en l'occurrence d'une œuvre d'importance majeure pour cette industrie. En prenant à sa charge l'édition de la Théorie générale de l'horlogerie de M. Léopold Defossez, la Chambre suisse de l'horlogerie ne vise pas simplement à en faciliter l'acquisition aux élèves de nos Ecoles d'horlogerie ; elle est convaincue de contribuer ainsi à l'approfondissement et au perfectionnement de l'enseignement technique et scientifique sur lequel repose toute tradition vivante comme celle de la montre suisse.*

ED. PRIMAULT,  
*Président de la Chambre suisse  
de l'horlogerie.*

## AVERTISSEMENT

Dès le milieu du siècle dernier, le prodigieux essor scientifique est jalonné d'innombrables publications se spécialisant de plus en plus dans chaque domaine. La mesure du temps, et avec elle l'horlogerie, occupent une place très importante parmi les sciences actuelles.

Tributaire des mathématiques, de l'astronomie, de la mécanique, de la physique, de la métrologie, de la métallographie, touchant à la chimie, à la minéralogie, à la géodésie, etc., la science horlogère sert aujourd'hui de fondement à une industrie très importante, dont les produits sont indispensables à l'humanité entière, de la montre-bracelet à l'horloge de tour, et de l'instrument de haute précision du laboratoire à l'émetteur de radio distribuant l'heure exacte au monde.

Datant de quelques siècles à peine et, à l'origine, travail d'artisans habiles fondant leur métier davantage sur l'empirisme que sur les sciences, l'industrie horlogère a peu à peu organisé la préparation professionnelle de son personnel. Dès le XIX<sup>e</sup> siècle, des écoles spécialisées formèrent et continuent de préparer les cadres de cette industrie : techniciens, praticiens et spécialistes.

Jules Grossmann, directeur de l'Ecole d'horlogerie du Locle de 1868 à 1901, comprit l'importance qu'il y avait à mettre à la disposition de ses élèves un cours d'horlogerie complet, de caractère scientifique aussi poussé que possible. Autodidacte et pédagogue remarquable, il rédigea, en collaboration avec son fils Hermann, le célèbre cours d'*Horlogerie théorique* édité au début de ce siècle. Ce manuel d'enseignement différait des publications précédentes

en langue française sur ce même sujet, par son information mathématique et scientifique beaucoup plus développée.

L'*Horlogerie théorique* des Grossmann fut le livre de chevet du technicien horloger pendant plusieurs décennies. Cet ouvrage, aujourd'hui épuisé, est indispensable à l'enseignement. La nécessité de le rééditer, en l'adaptant au progrès de la science et à l'évolution de l'industrie horlogère, posa aux Ecoles suisses d'horlogerie un problème dont la solution se révéla ardue. A quel homme de science confier l'exécution d'une telle œuvre ? On pensa au successeur en charge de Jules Grossmann, le regretté Robert Lavest. Mais, frappé par la maladie, il dut malheureusement renoncer à ce travail, auquel il n'a pas moins apporté sa contribution en réunissant une importante documentation de départ. R. Lavest a élaboré le plan général du cours, plan adopté par l'Association des directeurs des Ecoles suisses d'horlogerie.

M. Léopold Defossez, ingénieur et ancien directeur de l'Ecole d'horlogerie du Locle, ayant lui aussi été successeur de Jules Grossmann, accepta de rédiger l'œuvre elle-même. Auteur de nombreuses études techniques et historiques sur l'horlogerie, il fut un des fondateurs du Laboratoire suisse de recherches horlogères, dont il est resté le collaborateur. Nous le remercions d'avoir consacré son temps à la rédaction d'un ouvrage de grande envergure et de première importance pour l'industrie horlogère.

L'auteur, qui a été secondé dans son travail par MM. Ed. Neusel, professeur et directeur-adjoint de l'Ecole d'horlogerie et de mécanique de Saint-Imier, et F. Wiget, professeur et sous-directeur de l'Ecole d'horlogerie de La Chaux-de-Fonds, remercie bien vivement ces deux précieux collaborateurs.

Le premier s'est chargé plus spécialement de la rédaction du chapitre I, traitant des grandeurs, unités et symboles, ainsi que de la préparation du manuscrit pour l'impression, travail ingrat qu'il accomplit avec une conscience admirable. Il a également contribué à la rédaction de la théorie de la fonction harmonique et du moment d'inertie. Le second a dirigé, on verra avec quel soin, l'exécution des nombreux dessins en vue de leur reproduction.

Pour que l'ouvrage soit aussi parfait et complet que possible, le texte en a été soumis, chapitre après chapitre, aux différentes

Ecoles d'horlogerie, pour permettre à leurs directeurs de proposer des modifications et compléments.

L'édition de ce cours a été rendue possible grâce à l'aide que la Chambre suisse de l'horlogerie a bien voulu nous apporter. Cette institution a non seulement pris à sa charge les risques considérables que comporte actuellement une publication de ce genre, mais assumant pleinement son rôle d'éditeur, elle a tout mis en œuvre pour assurer à cet ouvrage une présentation typographique impeccable et le rendre accessible à tous les milieux intéressés. Qu'elle trouve ici le témoignage de notre vive reconnaissance.

L'auteur tient à rappeler que sans la bienveillance et la largeur de vue de M. F. Wæflier, il n'aurait pas pu rédiger cet ouvrage, et rend hommage à l'esprit éclairé de cet animateur.

\* \* \*

Qu'eût pensé Jules Grossmann de l'évolution de la fabrication des montres, du volume et de la construction des calibres? De l'instrument coûteux, dont l'exécution nécessitait un important travail manuel, la montre est devenue un objet de grande série vendu à un prix de plus en plus bas, et utilisé dans des conditions qui eussent fait frémir les horlogers du siècle passé.

Apparition de la montre-bracelet, de la fabrication mécanique, de l'interchangeabilité, du spiral compensateur, des pierres chassées, des amortisseurs de chocs, des chronographes-bracelets populaires, des montres à remontage automatique: autant de révolutions dans l'industrie horlogère. Loin de pâtir de toutes ces innovations, la précision des montres de série n'a cessé de s'améliorer.

Du mouvement d'horlogerie proprement dit, dont les organes ont de moins en moins de secrets pour le technicien, les problèmes que ce dernier est appelé à résoudre se sont déplacés dans le domaine de la fabrication en série, de l'amélioration de la précision, des propriétés des métaux utilisés, de la protection contre les influences extérieures, de l'adaptation à la mode et à l'évolution des conditions d'existence.

L'auteur a introduit dans son œuvre les dernières données de la technique moderne. Certains chapitres du cours des Grossmann ont été résumés, voire supprimés parce que traités dans d'autres disci-

plines (principes généraux de mécanique en particulier) ou n'ayant plus un caractère suffisant d'actualité ou d'utilité (étude de l'échappement Duplex fortement raccourcie, calcul détaillé du moment d'inertie d'un balancier, etc.). D'autres, par contre, ont été développés et complétés conformément à l'évolution technique et scientifique de ce dernier demi-siècle (erreurs et tolérances, division décimale des angles et du temps, échappement de pendules, horloges à quartz, engrenages différentiels, etc.).

D'autre part, les différents chapitres ont été ordonnés d'une façon un peu nouvelle, mais conforme à la succession logique de l'acquisition des connaissances par les élèves. On constatera, en particulier, que la théorie du mouvement oscillatoire précède les chapitres consacrés aux échappements. L'auteur a estimé, non sans raisons, qu'il est préférable d'étudier la théorie des échappements en sachant d'abord dans quelles conditions ceux-ci devront transmettre la force à l'organe réglant.

Bien que sensiblement augmenté dans certains chapitres par rapport à l'ouvrage des Grossmann, ce nouveau manuel d'enseignement n'a pas la prétention d'être une encyclopédie horlogère. Il eût fallu en élargir le cadre au-delà de ce qui est compatible avec le but envisagé. Les sujets qui y sont traités ne pourront cependant pas être étudiés tous en détail dans le programme normal des cours destinés aux techniciens. Il appartiendra aux professeurs d'en faire un choix judicieux, le surplus restant à la disposition des élèves pour compléter leurs connaissances par la suite.

Le très important domaine des applications de l'électricité à l'horlogerie n'a pas été incorporé au présent ouvrage. Il est si vaste qu'il aurait nécessité un troisième volume, et celui-ci aurait fait double emploi avec l'*Horlogerie électrique*, de R.-P. Guye et M. Bossart, paru en 1948 aux Editions du *Journal suisse d'horlogerie et de bijouterie*.

L'étude des chronographes et autres montres compliquées auraient pu trouver place également dans la *Théorie générale de l'horlogerie*. Les nombreux mécanismes imaginés dans ce domaine sont décrits dans *Les montres compliquées*, de François Lecoultre, ancien professeur à l'Ecole d'horlogerie de Genève, édité il y a quelques années par Ch. Rohr, à Bienne. D'autre part, les Editions du *Journal suisse d'horlogerie* viennent de publier un manuel sur

*Le chronographe, son fonctionnement et sa réparation*, de Bernard Humbert, professeur à l'Ecole d'horlogerie de Bienne, qui étudie très en détail les différents genres de chronographes, dont la vogue est devenue si grande.

La publication de la *Théorie générale de l'horlogerie* marque une étape importante dans l'histoire de la mesure du temps. Puisse cet ouvrage contribuer au maintien et à l'amélioration toujours possible de la qualité de la montre suisse. Nous avons conscience que son évolution continue; les derniers progrès de la science ouvrent de tels horizons que la montre pourrait être remplacée, un jour, par un instrument construit sur des principes tout différents de ce que nous connaissons aujourd'hui. Comme cette évolution est encore du domaine de l'hypothèse et qu'un manuel d'enseignement, si complet soit-il, ne saurait être à la page pendant plus d'une vingtaine d'années, nous pensons que celui-ci vient à son heure et nous espérons qu'il sera accueilli avec satisfaction par tous les milieux horlogers, qui l'attendent d'ailleurs avec impatience.

Le Locle, juillet 1949.

*Association des directeurs  
des Ecoles suisses d'horlogerie :*

Le président,  
A. JEANMAIRET.

Le secrétaire,  
P. BÉGUIN.

*L'auteur,*  
L. DEFOSSEZ.





## PRÉFACE

*Ecrire un livre sur la Théorie générale de l'horlogerie est, de nos jours, une entreprise difficile et de grande envergure. En effet durant le demi-siècle, ou à peu près, écoulé depuis la publication de l'ouvrage classique des Grossmann, la chronométrie a fait des progrès considérables. Elle a même notablement changé d'aspect.*

*Jusqu'aux alentours de 1900, et cela depuis l'époque héroïque de l'horloge et de la montre, c'est-à-dire depuis le XVII<sup>e</sup> siècle, avec Galilée, Huygens, Hooke et d'autres, ce sont surtout des mathématiciens qui se sont préoccupés de questions chronométriques. Se fondant sur les lois, supposées rigoureuses, de l'élasticité, du frottement, du choc, etc., ils ont réussi, par des voies essentiellement théoriques utilisant une analyse mathématique souvent assez ardue, à formuler les principes qui sont encore à la base du réglage de précision, de la compensation thermique, du fonctionnement de l'échappement, des engrenages, du ressort moteur, etc. Les travaux de Phillips, Villarceau, Caspari, des deux Grossmann eux-mêmes appartiennent à ce type. Ils ont fait faire à la chronométrie des progrès immenses — conjointement à l'œuvre de nature pratique des techniciens et des « chronométriers » — en utilisant des considérations essentiellement géométriques et mécaniques.*

*Avec le XX<sup>e</sup> siècle, pour se contenter d'une localisation grossière dans le temps, les physiciens sont intervenus, ou plutôt ont accentué fortement l'application des méthodes de la physique expérimentale à l'étude des problèmes relatifs à la mesure du temps. Cela est vrai, non*

*seulement pour ce qui concerne l'introduction de méthodes tout à fait nouvelles, comme celles qui utilisent les vibrations du quartz ou de la molécule d'ammoniaque et dont le présent ouvrage fait tout juste mention, mais aussi pour l'étude des appareils chronométriques classiques, notamment de la montre. Au lieu d'admettre des lois et d'en tirer les conséquences mathématiques, ces physiciens, bien persuadés de l'approximation inhérente à toute loi physique comme de l'insécurité provenant des simplifications nécessaires à l'emploi de l'analyse mathématique, ces physiciens se sont mis à expérimenter.*

*Les progrès qui ont résulté de l'application des méthodes expérimentales sont pour la plupart bien connus, classiques même. En étudiant expérimentalement les aciers au nickel, Ch.-Ed. Guillaume a découvert des alliages de très faible dilatabilité ou de coefficient thermoélastique quasi nul, dont l'emploi est aujourd'hui familier à quiconque s'occupe d'horlogerie. On a pu de même préciser l'action de nombreux facteurs sur la marche des montres, ainsi celles de la pression atmosphérique, d'un champ magnétique, des oscillations ou trépidations imposées au mécanisme, etc. La métallographie au sens le plus général du terme : étude de toutes les propriétés des métaux, a permis d'améliorer de plus en plus les alliages utilisés à la confection des montres et des horloges.*

*Ces divers points, à côté de l'exposé classique fort bien fait, sont traités avec une grande compétence dans le livre qu'on va lire. L'ouvrage de M. Defossez pourrait donc s'intituler à juste titre : Horlogerie théorique et expérimentale. Il faut une grande érudition technique et scientifique pour écrire un pareil ouvrage. M. Defossez possède cette érudition, de par sa formation d'ingénieur de l'Ecole polytechnique fédérale, sa situation passée de directeur de l'Ecole d'horlogerie du Locle — où il a professé durant des années une partie de la matière qu'il expose dans son livre — enfin par ses connaissances étendues de la science expérimentale. Il a été très heureusement secondé par M. Neusel, directeur-adjoint de l'Ecole d'horlogerie et de mécanique de Saint-Imier, qui a écrit les chapitres relatifs aux grandeurs et unités — celui-ci contient entre autres des tableaux complets, qui seront très utiles, donnant les relations entre les divers systèmes — et au calcul des moments d'inertie. Le livre entier est écrit dans un style simple et clair, d'une lecture facile, à part certains calculs assez compliqués, mais exposés en détail.*

*Cet ouvrage pourra-t-il jouer le rôle de manuel dans les Ecoles d'horlogerie ? On ne peut hésiter, me semble-t-il, à répondre par l'affirmative, et même à prévoir que, ce rôle, il le remplira très bien, si l'on entend par là qu'il servira de base à l'enseignement, et que le maître chargé des leçons théoriques ou pratiques y puisera les notions fondamentales et la matière nécessaire à ses leçons, qu'il s'inspirera surtout de son esprit. Pour les commençants, la lecture en sera certes un peu ardue et nécessitera les explications, l'interprétation du maître. Il sera alors excellent, surtout en ce qu'il forcera ce dernier à montrer aux élèves — ce qu'on néglige trop souvent de faire — que les théories ne sont jamais qu'approximativement exactes, parce que les fondements en sont incertains ou schématisés ; que par conséquent le contrôle expérimental est toujours nécessaire. Ils comprendront alors, ces élèves, que si parfois la réalisation pratique ne donne pas exactement le résultat prévu par la théorie, ce n'est pas nécessairement que cette réalisation soit imparfaite ou même fautive. Il peut arriver que la théorie elle-même soit en défaut, et que le dispositif réalisé avec soin et intelligence permette précisément de mettre le doigt sur cette insuffisance de la théorie et conduise ainsi à son remaniement. Bien entendu, avant d'accuser la théorie on s'entourera de toutes les vérifications et de tous les contrôles possibles... surtout si l'on n'est encore qu'un élève !*

*Cet ouvrage constituera aussi une mine précieuse de renseignements pour le scientifique, comme pour le technicien après ses années d'école, lorsqu'ils seront placés l'un ou l'autre devant un problème délicat. Ils y trouveront — sinon toujours la solution exacte et toute mâchée — presque certainement, du moins, l'indication de la voie à suivre pour y parvenir. Sa lecture fera peut-être aussi saisir, peu à peu, que pour résoudre les problèmes si nombreux, souvent si complexes et si difficiles que pose le fonctionnement d'une montre — ou d'une horloge — dans telle ou telle circonstance, le mieux ne consiste pas toujours à s'adresser à la montre elle-même. Je veux dire par là que souvent l'étude séparée d'un des éléments qui composent son mécanisme pourra conduire plus vite et plus sûrement au but que l'utilisation du mécanisme complet. Les divers facteurs qui influencent la marche, puisqu'en définitive ce sera toujours de la marche et de sa régularité qu'il s'agira, sont si nombreux, leur action si complexe et entremêlée, qu'il est souvent bien difficile, et même impos-*

sible, de faire la part exacte de ce qui revient au facteur envisagé et de juger de l'effet qu'il produit.

Il faut bien se rendre compte, en particulier, que l'influence produite par un facteur donné peut être ou directe ou indirecte, et qu'un même facteur peut agir simultanément des deux façons. Ainsi la dilatation du pendule ou du balancier, son changement de forme, sont des influences directes de la température, puisqu'elles correspondent à des variations du moment d'inertie, donc de la marche. De même l'effet de la température sur le module d'élasticité du spiral et sur ses dimensions est un effet direct. Par contre, la variation de la viscosité de l'huile avec la température, celle de la viscosité de l'air, qui toutes deux entraînent des variations dans l'amplitude des oscillations constituent des effets indirects de la température : comme l'isochronisme n'est jamais rigoureusement réalisé, ces variations d'amplitude à leur tour agiront sur la marche.

Les variations de la pression barométrique causent des changements dans la densité de l'air, donc dans la masse d'air entraîné par le balancier et la durée d'oscillation de ce dernier. C'est un effet direct. Ces variations de pression agissent aussi sur l'amplitude des oscillations et, par suite des défauts d'isochronisme, sur la marche : effet indirect. Si l'on n'avait jamais étudié que l'action globale de la température ou de la pression sur la marche d'une montre prise telle quelle, l'état de ces deux questions ne serait pas aussi avancé qu'il l'est aujourd'hui. Ce qui ne veut pas dire, bien entendu, que l'utilisation pure et simple des montres n'ait pas joué un certain rôle dans la solution du problème. Mais l'étude en laboratoire de la dilatation des alliages, de l'élasticité et de l'effet de la température sur les modules, l'étude du mouvement dans divers gaz, à diverses pressions, d'un système oscillant libre et non plus entretenu, ont joué le rôle prépondérant.

Tels sont, entre autres, les enseignements que l'on tirera de la lecture attentive de cette Théorie générale de l'horlogerie, qui fera certainement sensation dans le monde horloger en général, et dans celui des Ecoles d'horlogerie en particulier. On peut souhaiter qu'à bref délai soient réalisées des traductions en allemand et en anglais : elles auront sûrement un vif succès.

Février 1950.

A. JAQUEROD.

**THÉORIE GÉNÉRALE  
DE  
L'HORLOGERIE**



## CHAPITRE PREMIER

### GRANDEURS, UNITÉS, SYMBOLES

**Grandeurs.** — De façon générale, nous appelons *grandeur* tout ce que l'on peut tenter de mesurer, c'est-à-dire tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution. Une longueur, un poids, un travail, une température, etc. sont des grandeurs<sup>1</sup>.

**La mesure en général.** — *Mesurer une grandeur, c'est la comparer à une grandeur de même espèce prise pour unité.* Le résultat de cette comparaison est un nombre  $n$  qui exprime combien de fois la grandeur  $G$  contient l'unité  $U$  :

$$G = nU \quad \text{ou} \quad n = \frac{G}{U}.$$

Ce nombre  $n$  constitue la *mesure* de la grandeur par rapport à l'unité choisie. C'est grâce à la notion de mesure que la précision du langage mathématique a pu être appliquée à la physique, que cette discipline est réellement devenue une science.

Si une certaine longueur contient 5 fois l'unité de longueur appelée mètre, nous dirons que sa mesure est égale à 5 quand nous prenons le mètre comme unité.

La mesure d'une grandeur dépend évidemment de l'unité choisie. L'équation fondamentale ci-dessus montre que la mesure  $n$  est proportionnelle à la grandeur  $G$  et qu'elle varie en raison inverse de l'unité  $U$  ; plus cette unité est grande, plus la mesure est petite. Ainsi notre longueur est représentée par 500, 5 ou 0,005 suivant que nous prenons pour unité le centimètre, le mètre ou le kilomètre.

La mesure d'une grandeur peut être effectuée *directement* en la comparant à la grandeur de même espèce prise pour unité. Tel est le cas des

<sup>1</sup> Les symboles littéraux qui représentent des grandeurs ont été composés en italique ; ceux qui désignent des unités ou des opérateurs le sont en caractères romains. Voir à ce sujet les *Règles et recommandations pour les symboles littéraux et signes*, éditées par l'Association suisse des électriciens, Zurich, Seefeldstrasse 301.

longueurs et des angles qu'il est possible d'évaluer au moyen de règles ou de cercles gradués, des masses comparables à des multiples du gramme au moyen de la balance. Mais le plus souvent, la mesure de la grandeur se déduit de la mesure directe d'autres grandeurs, à l'aide d'une formule.

Remarquons que certaines grandeurs, dites *grandeurs repérables*, ne sont pas mesurables au sens que nous attachons à ce mot ; nous ne pouvons que leur donner un *numéro d'ordre* sur une échelle déterminée, par exemple l'échelle thermométrique pour les températures, l'échelle de Mohs pour la dureté des corps (talc = 1, diamant = 10), l'échelle des notes pour qualifier un devoir, etc.

**Définition de l'unité.** — Avant d'effectuer une mesure, il faut choisir l'unité que l'on veut comparer à la grandeur à mesurer.

Théoriquement, le choix de l'unité est arbitraire. On ne lui impose qu'une condition : être de même nature que la grandeur à mesurer. Mais on a tout intérêt à réduire autant que possible le nombre de ces unités, qui pour une même grandeur pourrait être infini. On conçoit alors, pour les besoins de la science et les commodités du commerce et de l'industrie, la nécessité de conventions qui fixent les unités des diverses grandeurs.

Pour rendre possible la comparaison des mesures faites dans les différents pays et aux différentes époques, il est indispensable de donner de chaque unité une définition précise, reconnue par tous grâce à une entente internationale ; pour assurer l'honnêteté des transactions, il est nécessaire que ces définitions soient, dans chaque pays, sanctionnées par la loi.

L'*étalon* est la représentation matérielle de l'unité, d'un multiple ou d'une fraction de l'unité qui n'est pas nécessairement simple. Les étalons doivent être aussi invariables et indestructibles que possible.

**Précision des mesures.** — Par suite de l'imperfection des appareils de mesure, des méthodes de mesure et de nos sens, l'opération qui consiste à évaluer une grandeur est toujours entachée d'erreurs, de sorte que le résultat est toujours approximatif.

La mesure se traduit par un nombre, le plus souvent décimal. L'ordre de grandeur de la dernière décimale doit indiquer la précision probable de la mesure. Si nous disons qu'une longueur est 27,2 mm, cela signifie que cette longueur a été mesurée à un dixième de millimètre près ; en indiquant 27,200 mm, nous affirmons qu'elle a été mesurée à un millième de millimètre près.

Les lois physiques, qui s'expriment par des formules, nous apprennent comment varie la grandeur d'un certain effet observé, lorsque varie la



grandeur de l'action qui le produit. *Les lois physiques sont des lois expérimentales*, car elles établissent des relations entre des nombres qui sont le résultat de mesures effectivement faites sur des expériences effectivement réalisées. *Une loi est exacte lorsque la formule qui la traduit est vérifiée avec une erreur inférieure à celle qui correspond à la précision des mesures*; il est donc essentiel que le physicien sache de combien il se trompe sur chaque mesure, et de combien il se trompe sur les nombres obtenus au cours des calculs qu'il fait pour appliquer ou pour vérifier une loi physique. Telle est la raison d'être de l'évaluation des erreurs sur les quantités mesurées et du calcul des erreurs.

**L'erreur absolue.** — L'*erreur absolue* est la différence entre le résultat de la mesure et la valeur réelle de la grandeur mesurée.

Puisque la valeur réelle de la grandeur est inconnue, il en est de même de l'erreur absolue; mais on peut souvent en donner une limite supérieure. C'est pourquoi on appelle erreur absolue sur le résultat  $n$  d'une mesure une quantité  $\varepsilon$ , telle que la valeur réelle  $N$  soit certainement comprise dans l'intervalle  $n - \varepsilon$  et  $n + \varepsilon$  (le plus souvent, on ignore le sens de l'erreur):

$$n - \varepsilon < N < n + \varepsilon,$$

ce que l'on écrit  $N = n \pm \varepsilon$ . L'erreur  $\varepsilon$  ainsi définie est l'*erreur absolue maximum*; elle seule est plus ou moins accessible au calcul.

**Erreurs systématiques et erreurs accidentelles.** — Les erreurs absolues sont de deux sortes: il en est qui, lorsqu'on répète l'observation, se manifestent toujours, et dans le même sens, et d'autres qui se produisent au hasard, tantôt dans un sens, tantôt dans un autre. Les premières sont dites *erreurs systématiques*, les secondes *erreurs accidentelles* ou *fortuites*.

Les erreurs systématiques ont une cause déterminée qui, agissant dans les mêmes conditions, fausse le résultat de la mesure toujours dans le même sens (emploi d'un instrument inexact ou d'une méthode défectueuse). C'est ainsi qu'on commet une erreur systématique lorsqu'on néglige l'action de la température, de la pression, et, plus généralement, d'un facteur d'expérience agissant, au cours des mesures, sur le phénomène étudié.

Les erreurs systématiques sont graves, car elles subsistent intégralement dans le résultat, quelle que soit la multiplicité des observations. Aussi s'efforce-t-on de déterminer les causes d'erreurs systématiques et d'annihiler leurs effets par des corrections. C'est ainsi qu'on évaluera l'erreur systématique d'un instrument de mesure inexact en étalonnant cet instrument.

Les erreurs accidentelles proviennent des nombreuses petites causes qui peuvent faire différer les résultats successivement obtenus en répétant une mesure déterminée; elles sont d'autant plus faibles que l'instrument de mesure est plus précis et que l'opérateur est plus habile. Les erreurs accidentelles se produisant indistinctement dans les deux sens ne nous préoccupent guère; il suffit de multiplier les observations pour qu'elles s'éliminent plus ou moins complètement dès qu'on prend la moyenne arithmétique des résultats obtenus.

**L'erreur relative.** — L'*erreur relative* est le rapport de l'erreur absolue à la mesure. Comme on ne connaît qu'une limite supérieure de l'erreur absolue, on ne connaît aussi qu'une limite supérieure de l'erreur relative. Si  $n$  est le résultat de la mesure,  $\varepsilon$  une limite supérieure de l'erreur absolue, l'erreur relative est inférieure à  $\frac{\varepsilon}{n}$ .

Cette limite de l'erreur relative, ou *erreur relative maximum*, s'exprime le plus souvent par une fraction dont le dénominateur est une puissance de 10. Soit, par exemple, 27,2 mm la mesure d'une longueur à 0,1 mm près. L'erreur absolue est inférieure à 0,1 mm et l'erreur relative à  $\frac{0,1}{27,2} \cong \frac{4}{1000}$ . On dira que la précision de la mesure est 4/1000 ou 4 ‰.

L'erreur relative maximum caractérise la précision d'une mesure, une mesure étant d'autant plus précise que la limite supérieure de l'erreur relative est plus faible.

Si l'on mesure une longueur de 1 km à 1 m près, ou 1 m à 1 mm près, ou 1 cm à 0,01 mm près, l'erreur relative est inférieure dans les trois cas à 1/1000. On dit qu'on a effectué des mesures d'égale précision.

Alors que l'erreur absolue s'exprime en unités de la grandeur mesurée, l'erreur relative, par contre, est un nombre pur, indépendant du choix des unités. L'erreur relative est plus intéressante à considérer que l'erreur absolue, car elle permet de comparer les approximations obtenues dans la mesure de grandeurs qui ne sont pas du même ordre ou sont de natures différentes.

**Ecart et tolérances.** — Il n'est guère possible, à moins d'un hasard extraordinaire, de mesurer exactement une longueur. Lorsque le technicien prescrit une dimension pour une pièce à exécuter, l'ouvrier cherche à obtenir la dimension prescrite; il n'y parvient que très rarement et le lui demander n'aurait aucun sens. Mesurons la pièce exécutée: le résultat de la mesure diffère de la dimension prescrite ou *cote nominale*; la différence

entre les deux valeurs provient à la fois de l'imperfection de l'exécution et de l'imperfection de la mesure. L'erreur absolue est la somme des erreurs commises en réalisant et en mesurant. Cette erreur ne doit pas dépasser une certaine valeur, sinon la pièce est inutilisable. Dans une fabrication rationnelle, il est nécessaire de fixer l'erreur tolérable, ou *écart*, qui peut être positive, négative, ou positive et négative.

L'*écart supérieur* est la différence entre la cote maximum tolérable et la cote nominale ; l'*écart inférieur*, la différence entre la cote minimum tolérable et la cote nominale. La *tolérance* est la différence entre l'écart supérieur et l'écart inférieur.

Si, dans un dessin, le technicien prescrit la dimension en millimètres :

$$20 \begin{array}{c} + 0,06 \\ - 0,02 \end{array},$$

l'écart supérieur est  $+ 0,06$  et l'écart inférieur  $- 0,02$ . La tolérance est  $0,08$  mm. La pièce réalisée est rebutée si la dimension n'atteint pas  $19,98$  mm ou dépasse  $20,06$  mm.

La prescription des écarts est indispensable pour la fabrication économique de pièces interchangeables.

Lorsque la fabrication est précise, les écarts sont faibles. La tendance à diminuer les écarts se heurte à l'augmentation des prix de revient qui s'élèvent avec le degré de précision de la fabrication.

**Système cohérent ou absolu d'unités.** — On appelle *système d'unités* l'ensemble des unités qui servent à la mesure des différentes grandeurs. Un système est dit « incohérent », lorsqu'on a laissé au hasard le soin de relier entre elles les valeurs des diverses unités.

Au contraire, dans un *système cohérent* ou *absolu d'unités* (les seuls utilisés pour les besoins de la technique), on distingue :

1° un certain nombre d'unités de base choisies arbitrairement ou *unités fondamentales* ;

2° les autres unités ou *unités dérivées*, qui se déduisent des unités fondamentales grâce au choix conventionnel de certaines formules dites *équations de définition*.

Le choix des unités fondamentales et même de leur nombre est en principe arbitraire. Mais pratiquement, il se trouve commandé assez impérieusement par des considérations de commodité et de précision. C'est ainsi que les unités fondamentales doivent se rapporter à des grandeurs indépendantes, c'est-à-dire telles que l'une d'elles ne soit pas déterminée dès qu'on a fixé les autres. On les choisira le plus simplement possible, en donnant la préférence à celles qui peuvent se représenter par des étalons

définis d'une façon précise et invariable dans le temps et dans l'espace.

Ces considérations ont conduit les physiciens à choisir trois unités fondamentales qui sont : l'*unité de longueur*, l'*unité de masse* et l'*unité de temps*, ou bien l'*unité de longueur*, l'*unité de force* et l'*unité de temps*.

**Le système métrique international.** — Les systèmes d'unités employés par tous les pays du monde dans la technique scientifique, et par la plupart d'entre eux dans la pratique courante, dérivent tous du *système métrique international* ; dans ce système, les unités fondamentales de longueur et de masse sont définies par les étalons prototypes internationaux du mètre et du kilogramme.

*L'unité principale de longueur est le mètre (m), longueur à 0° C du prototype international en platine iridié, qui a été sanctionné par la Conférence générale des Poids et Mesures, tenue à Paris en 1889, et qui est déposé au Pavillon de Breteuil à Sèvres.* Cette longueur, représentée par la distance d'axe en axe des traits médians gravés au voisinage de chaque extrémité de la règle (étalon à traits), est d'environ 0,2 mm inférieure à la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre, définition première du mètre.

*L'unité principale de masse est le kilogramme (kg), masse du prototype international en platine iridié, qui a été sanctionné par la Conférence générale des Poids et Mesures, tenue à Paris en 1889, et qui est déposé au Pavillon de Breteuil à Sèvres.* Cette masse excède d'environ 27 mg la masse du décimètre cube d'eau pure prise à son maximum de densité (4° C), définition première du kilogramme.

L'unité de force sera définie plus loin.

La troisième unité fondamentale est l'unité de temps. Dans tous les systèmes en usage, cette unité est la *seconde* (s) ou 1/86 400 partie du jour solaire moyen.

**Systèmes d'unités utilisés.** — Les systèmes employés actuellement dans les applications de la mécanique sont le *système C.G.S.*, du type Longueur-Masse-Temps, et le *système M.Kf.S.*, du type Longueur-Force-Temps. Ces deux systèmes sont désignés par les initiales de leurs trois unités fondamentales.

#### I. SYSTÈME C.G.S.

Dans ce système, universellement adopté par les physiciens, les trois unités fondamentales sont :

unité de longueur : le *centimètre* (cm),  
 unité de masse : le *gramme* (g),  
 unité de temps : la *seconde* (s).

Le centimètre et le gramme sont définis à partir des étalons prototypes internationaux du mètre et du kilogramme :

$$1 \text{ cm} = 0,01 \text{ m}, \quad 1 \text{ g} = 0,001 \text{ kg}.$$

Les mécaniciens et autres usagers reprochent à ce système la petitesse extrême de ses unités.

## II. SYSTÈME M.K.f.S.

Ce système, dit « industriel » ou « des mécaniciens », est très employé dans les applications industrielles de la mécanique. Il diffère du précédent en ce que l'unité fondamentale de masse est remplacée par une unité fondamentale de force. Les trois unités fondamentales sont :

unité de longueur : le *mètre* (m),  
 unité de force : le *kilogramme-force*,  
                               ou *kilogramme-poids*,  
                               ou simplement *kilogramme* (kg\*),  
 unité de temps : la *seconde* (s).

*Poids d'un corps.* — Tous les corps placés à la surface de la Terre subissent, du fait de la gravitation universelle, une force d'attraction appelée *gravité*, et du fait du mouvement de rotation de la Terre sur elle-même, une *force centrifuge*. En chaque lieu, la résultante de ces deux forces est la *pesanteur*, et la direction de cette résultante, indiquée par le fil à plomb ou le niveau, est la *verticale*.

L'action de la pesanteur sur un corps donné représente le *poids* de ce corps. C'est une force verticale dirigée vers le bas et appliquée au centre de gravité du corps.

*Accélération de la pesanteur.* — En vertu de la pesanteur, tous les corps tombent en un même lieu dans le vide suivant la verticale, d'un même mouvement uniformément accéléré, quelle que soit leur densité. L'accélération due à la pesanteur est représentée par la lettre *g*.

La valeur de *g* dépend de la latitude et de l'altitude du lieu où l'on se trouve. C'est ainsi que la valeur de *g* réduite au niveau de la mer est :

$$\begin{aligned} &978,04 \text{ cm/s}^2 \text{ à l'équateur (latitude } 0^\circ), \\ &983,22 \text{ cm/s}^2 \text{ au pôle (latitude } 90^\circ). \end{aligned}$$

L'accélération *g* varie donc de 5 millièmes de sa valeur de l'équateur (force centrifuge maximum) au pôle (force centrifuge nulle), sans compter ses variations avec l'altitude.

La valeur adoptée pour l'accélération normale de la pesanteur est  $g = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$ , correspondant à très peu près à l'accélération de la pesanteur à  $45^\circ$  de latitude et au niveau de la mer. Ce nombre conventionnel a été obtenu en divisant la valeur mesurée au Pavillon de Breteuil par le coefficient théorique de 1,000 332 2 de réduction à  $45^\circ$  de latitude et au niveau de la mer.

*Poids et masse.* — Dans le langage courant, les notions de poids et de masse sont très généralement confondues bien que, physiquement, elles représentent deux choses essentiellement différentes.

Etant donné un corps, sa *masse* est un élément invariable, caractéristique de la quantité de matière qu'il contient ou de l'inertie qu'il offre au mouvement, tandis que son *poids* est une force représentant l'action que la pesanteur exerce sur lui.

Le poids  $P$  et la masse  $m$  d'un corps sont liés entre eux par la relation fondamentale :

$$P = mg.$$

Le poids d'un corps dépend donc de deux facteurs : la masse  $m$  du corps, quantité invariable, et l'accélération  $g$  de la pesanteur, quantité variable d'un lieu à un autre. Il en résulte que *le poids d'un corps est fonction du lieu où il se trouve.*

*Définition de l'unité fondamentale de force.* — L'unité fondamentale de force, le *kilogramme-force*, ou *kilogramme-poids*, ou plus simplement *kilogramme*, est, par définition, le poids d'un corps ayant une masse de 1 kilogramme en un lieu où l'accélération de la pesanteur est normale. Cette unité de force est donc représentée par le poids du prototype international en platine iridié appelé « kilogramme » en un lieu où  $g = 9,806\,65 \text{ m/s}^2$ . Remarquons que ce lieu n'est pas du tout le Pavillon de Breteuil comme on l'entend dire parfois.

Le poids d'un corps variant suivant le lieu où il se trouve, le choix de cette grandeur pour définir l'unité fondamentale de force n'est guère heureux. Il est vrai que cette variation, de l'ordre de quelques millièmes, peut être considérée comme pratiquement négligeable dans les mesures courantes. Mais il n'en reste pas moins que le poids du « kilogramme » est une fonction de ses coordonnées dans l'espace, de sorte que le kilogramme-force n'est pas une unité irréprochable, puisque sa définition exige la fixation d'un lieu.

*Kilogramme-masse et kilogramme-force.* — Il est indispensable de bien faire la distinction suivante :

1° dans un système d'unité du type Longueur-Masse-Temps comme le système C.G.S., le *kilogramme* est une unité de masse ou quantité de matière égale à la masse du prototype international ;

2° dans un système d'unités du type Longueur-Force-Temps comme le système M.Kf.S., le *kilogramme* est une unité de force égale au poids de ce même prototype.

On peut dire également: *en un lieu où l'accélération de la pesanteur est normale, un corps ayant une masse de 1 kilogramme (C.G.S.) a un poids de 1 kilogramme (M.Kf.S.).*

Il est certes regrettable que le terme « kilogramme » désigne deux unités différentes<sup>1</sup>. La confusion provient également de ce que dans la vie courante on appelle « poids » ce qui est en réalité une masse, une quantité de matière. En achetant un kilogramme de pain, on ne se soucie pas de l'action de la pesanteur sur ce pain, mais bien de la quantité de matière nutritive qui y est contenue; emporté au sommet du Mont-Blanc, ce pain pèsera moins, mais il aura évidemment gardé la même valeur nutritive que dans la plaine.

Dans les transactions commerciales, le kilogramme est donc une masse, mais on continue à l'appeler « poids ». Cela ne présente d'ailleurs aucun inconvénient si l'on en est averti. En chimie également, on désigne souvent par poids atomique et poids moléculaire ce qui est en réalité une masse atomique et une masse moléculaire.

Une personne peu familiarisée avec la mécanique pourrait se poser la question suivante: en disant qu'un corps « pèse » 20 kilogrammes, donne-t-on son poids ou sa masse? On donne à la fois l'un et l'autre, car on énonce ainsi *simultanément* que le poids et la masse de ce corps valent 20 fois le poids et la masse du prototype. Suivant le système d'unités utilisé, c'est le poids ou la masse que le nombre 20 fait connaître directement, sans calcul. « Un corps pèse 20 kg » signifie donc, *dans le système C.G.S.* :

la masse de ce corps est  $20 \text{ kg} = 20\,000 \text{ g}$ ,

le poids de ce corps est  $20 \cdot 981\,000 \text{ dynes}$ ;

*dans le système M.Kf.S.* :

le poids de ce corps est  $20 \text{ kg}^*$ ,

la masse de ce corps est  $\frac{20}{9,81} \text{ U.M.}$

*Unité de masse.* — Dans le système M.Kf.S. l'unité de force étant une unité fondamentale, l'unité de masse devient une unité dérivée.

La masse est liée à la force par l'équation fondamentale de la dynamique:  $F = ma$ . Nous avons  $m = 1$ , lorsque simultanément  $F = 1$  et

<sup>1</sup> Aussi, afin d'écartier toute possibilité de confusion, affecterons-nous d'un astérisque les symboles représentant les unités de force dans le système M.Kf.S.

$a = 1$ , ce qui permet de dire : *dans tout système cohérent d'unités, l'unité de masse est la masse à laquelle une force unité imprime l'unité d'accélération.*

Dans le système M.Kf.S., l'unité de masse est donc la masse à laquelle une force de 1 kilogramme imprime une accélération de  $1 \text{ m/s}^2$ . Cette unité n'a pas reçu de nom particulier. Nous l'appellerons *unité industrielle de masse* (U.M.).

Nous pouvons donner une représentation de cette unité industrielle de masse en partant du poids. Parmi les forces agissant sur un corps, nous pouvons considérer l'action de la pesanteur représentée par le poids  $P$  du corps. L'accélération est alors  $g$  et nous avons :

$$P = mg \quad \text{ou} \quad m = \frac{P}{g}.$$

Considérons maintenant un corps qui pèse  $P = g$  kilogrammes, sa masse sera  $m = \frac{g}{g} = 1$ , soit justement l'unité de masse. Comme, en un lieu où l'accélération de la pesanteur est normale, un corps qui pèse  $g$  kilogrammes-force a une masse de  $g$  kilogrammes-masse, nous pouvons dire :

*l'unité industrielle de masse est représentée par la masse d'un corps qui pèse  $g = 9,806 \ 65 \text{ kg}^*$*

et écrire :

$$1 \text{ U.M.} = 9,806 \ 65 \text{ kg} \cong 9,81 \text{ kg}.$$

Dans le système M.Kf.S., on obtient la masse d'un corps en divisant son poids en kilogrammes par  $g = 9,806 \ 65 \cong 9,81$ .

**Equation aux dimensions d'une grandeur.** — Considérons le travail  $W$  produit par une force  $F$  dont le point d'application se déplace d'une longueur  $l$  dans la direction de la force. Désignons respectivement par  $L$ ,  $M$ ,  $T$  les trois grandeurs fondamentales longueur, masse, temps. Nous avons :

$$\begin{aligned} W &= Fl = \text{Force} \times \text{Longueur} \\ &= (\text{Masse} \times \text{Accélération}) \times \text{Longueur} \\ &= \left( \text{Masse} \times \frac{\text{Vitesse}}{\text{Temps}} \right) \times \text{Longueur} \\ &= \text{Masse} \times \frac{\frac{\text{Longueur}}{\text{Temps}}}{\text{Temps}} \times \text{Longueur} \\ &= \frac{\text{Masse} \times (\text{Longueur})^2}{\text{Temps}^2} = \frac{ML^2}{T^2} = ML^2T^{-2}. \end{aligned}$$



Nous dirons que le travail a pour dimensions  $ML^2T^{-2}$ , et nous écrirons symboliquement :

$$[\text{Travail}] = ML^2T^{-2}.$$

C'est l'équation aux dimensions du travail ; elle signifie que cette grandeur varie comme la puissance 1 de la masse, la puissance 2 de la longueur et la puissance  $-2$  du temps. En d'autres termes, si l'unité de masse devenait  $M$  fois plus grande, l'unité de longueur  $L$  fois plus grande et l'unité de temps  $T$  fois plus grande, l'unité de travail deviendrait  $ML^2T^{-2}$  fois plus grande.

En prenant la longueur  $L$ , la force  $F$  et le temps  $T$  comme grandeurs fondamentales, on aurait obtenu :

$$[\text{Travail}] = [\text{Force}] \times [\text{Longueur}] = FL.$$

Le travail a pour dimensions  $FL$ , c'est-à-dire varie comme la puissance 1 de la force et la puissance 1 de la longueur. En d'autres termes, si l'unité de force devenait  $F$  fois plus grande et l'unité de longueur  $L$  fois plus grande, l'unité de travail deviendrait  $FL$  fois plus grande.

L'équation aux dimensions d'une grandeur est indépendante des unités choisies ; elle exprime en somme la façon dont la grandeur est liée aux grandeurs fondamentales et, par conséquent, la façon dont son unité varie quand on fait varier les unités fondamentales dont elle dépend.

**Problème du changement d'unités.** — Soient  $L, M, T$  les grandeurs fondamentales. Considérons deux systèmes d'unités I et II tels que, pour passer du système I au système II, il faut remplacer les unités fondamentales de longueur, masse et temps par d'autres, respectivement  $L, M$  et  $T$  fois plus grandes.

Mesurons une certaine grandeur  $G$  dans les deux systèmes d'unités, et soient :

$n$ , sa mesure dans le système I (unité  $U$ ) ;

$n'$ , sa mesure dans le système II (unité  $U'$ ) ;

$M^aL^bT^c$ , son équation aux dimensions.

En passant du système I au système II, l'unité  $U$  avec laquelle nous avons mesuré la grandeur  $G$  dans le système I est devenue  $M^aL^bT^c$  fois plus grande :

$$U' = U \cdot M^aL^bT^c.$$

D'après la définition de la mesure d'une grandeur, nous avons :

$$G = nU = n' U',$$

d'où nous tirons :

$$n' = \frac{nU}{U'} = \frac{nU}{U \cdot M^a L^b T^c}$$

ou

$$n' = \frac{n}{M^a L^b T^c}.$$

Cette formule résout le problème du changement d'unités. Si les grandeurs fondamentales étaient L, F, T, nous ferions intervenir F au lieu de M.

Remarquons que l'application de cette formule exige que les deux systèmes d'unités aient les mêmes grandeurs fondamentales : L, M, T ou L, F, T. Toutefois, rien ne nous empêche de passer d'un système d'unités du type Longueur-Masse-Temps à un système d'unités du type Longueur-Force-Temps, et inversement. Il suffit de considérer dans le second système la masse, et non la force, comme grandeur fondamentale. Nous passons donc du système C.G.S. au système M.Kf.S., et inversement, en posant que l'unité fondamentale de masse de ce dernier système vaut 9,806 65 kg.

*Application 1. — L'accélération d'un mobile vaut  $a = 1000$  C.G.S. Par quel nombre  $a'$  serait mesurée cette accélération dans un système kilomètre et heure ?*

On a :

$$[\text{Accélération}] = LT^{-2}.$$

Le passage du système (centimètre, seconde) au système (kilomètre, heure) se fait comme suit :

$$1 \text{ cm} \longrightarrow 1 \text{ km} = 10^5 \text{ cm}.$$

En passant du cm au km, la nouvelle unité de longueur est devenue  $10^5$  fois plus grande que l'ancienne. Donc  $L = 10^5$ .

$$1 \text{ s} \longrightarrow 1 \text{ h} = 3600 \text{ s}.$$

En passant de la seconde à l'heure, la nouvelle unité de temps est devenue 3600 fois plus grande que l'ancienne. Donc  $T = 3600$ .

Ainsi :

$$a' = \frac{a}{LT^{-2}} = \frac{1000}{10^5 \cdot 3600^{-2}} = 129\,600 \text{ km/h}^2.$$

*Application 2. — Dans le système M.Kf.S., le poids spécifique d'un corps vaut  $\delta = 8800 \text{ kg}^*/\text{m}^3$ . Par quel nombre  $\delta'$  serait mesuré ce poids spécifique dans le système C.G.S. ?*

Le poids spécifique d'un corps est le poids de l'unité de volume de ce corps. On a donc :

$$[\text{Poids spécifique}] = \frac{[\text{Force}]}{[\text{Volume}]} = \frac{MLT^{-2}}{L^3} = ML^{-2}T^{-2}.$$

Les deux systèmes d'unités devant avoir les mêmes grandeurs fondamentales, par exemple L, M, T, on posera que l'unité fondamentale de masse dans le système M.Kf.S. vaut environ 9,81 kg. Le passage du système (m, kg\*, s) ou (m, 9,81 kg, s) au système (cm, g, s) se fait alors comme suit :

$$1 \text{ m} \longrightarrow 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}.$$

En passant de 1 m à 1 cm, la nouvelle unité de longueur est devenue  $10^{-2}$  fois plus grande que l'ancienne. Donc  $L = 10^{-2}$ .

$$9,81 \text{ kg} \longrightarrow 1 \text{ g} = 10^{-3} \text{ kg}.$$

En passant de 9,81 kg à 1 g, la nouvelle unité de masse est devenue  $\frac{10^{-3}}{9,81}$  fois plus grande que l'ancienne. Donc  $M = \frac{10^{-3}}{9,81}$ .

$$1 \text{ s} \longrightarrow 1 \text{ s}$$

En passant d'un système à l'autre, l'unité de temps est restée inchangée. Donc  $T = 1$ .

Ainsi :

$$\delta' = \frac{\delta}{ML^{-2}T^{-2}} = \frac{8800}{\frac{10^{-3}}{9,81} \cdot (10^{-2})^{-2} \cdot 1^{-2}} = 8633 \text{ dynes/cm}^3.$$

**Homogénéité des formules.** — Toute équation de la forme  $A = B$ , traduisant une loi géométrique, mécanique ou physique, doit être *homogène*, c'est-à-dire que les grandeurs A et B, reliées entre elles par le signe =, doivent être de même nature, avoir la même équation aux dimensions.

D'autre part, si un membre de l'équation est représenté par une somme algébrique de termes :

$$A = a + b - c + \dots,$$

ces mêmes dimensions doivent se retrouver pour chacun des termes a, b, c, ... entrant dans la somme. Autrement dit : *on ne peut évaluer,*

*additionner et soustraire que des grandeurs de même nature, une masse et une masse, une vitesse et une vitesse, etc.*

Par contre, on peut sans autre multiplier ou diviser l'une par l'autre deux grandeurs de natures différentes, mais alors le résultat est une grandeur de nature différente de celle des grandeurs dont elle est issue. C'est ainsi que le produit d'une masse par une accélération est une force, le quotient d'une longueur par un temps est une vitesse, etc.

Le quotient de deux grandeurs de même nature est un *nombre pur*, sans dimensions.

*Si une équation n'est pas homogène, elle est certainement fausse.* Cette vérification, très rapide, devrait toujours être faite, ce qui éviterait souvent des erreurs grossières. Cependant, *l'homogénéité n'est pas une preuve d'exactitude*, car les équations aux dimensions ne font pas intervenir les coefficients numériques qui sont une source d'erreur.

*Application.* — Vérifier l'homogénéité de la formule :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mga}},$$

sachant que  $T_0$  représente un temps,  $I$  un moment d'inertie,  $M$  une masse,  $g$  une accélération et  $a$  une distance. Le coefficient numérique  $2\pi$  est sans dimensions.

Le premier membre de la formule ayant les dimensions d'un temps, vérifions qu'il en est bien de même du second membre :

$$\left[ 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mga}} \right] = \left( \frac{ML^2}{M \cdot LT^{-2} \cdot L} \right)^{\frac{1}{2}} = \left( T^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} = T.$$

Remarquons que si l'on avait oublié le facteur  $2\pi$  de la formule, l'homogénéité serait vérifiée avec une formule fausse.

Le contrôle de l'homogénéité d'une formule peut aussi se faire sans utiliser les équations aux dimensions, en remplaçant par son unité chaque grandeur intervenant dans la formule. Dans ce cas, le choix d'un système d'unités s'impose. Prenons le système C.G.S. Le premier membre de la formule étant un temps s'exprimera en secondes. Il doit donc en être de même du second membre :

$$\sqrt{\frac{g \cdot \text{cm}^2}{g \cdot \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \text{cm}}} = \sqrt{\text{s}^2} = \text{s}.$$

## Les unités géométriques et mécaniques des systèmes C. G. S. et M. Kf. S.

TABLEAU DES UNITÉS DU SYSTÈME C.G.S.

| Grandeur                | Dimensions                       | Unité  | Symbole              |
|-------------------------|----------------------------------|--|----------------------|
| UNITÉS FONDAMENTALES    |                                  |  |                      |
| Longueur                | L                                | centimètre                                     | cm                   |
| Masse                   | M                                | gramme   | g                    |
| Temps                   | T                                | seconde  | s                    |
| UNITÉS DÉRIVÉES         |                                  |  |                      |
| I. UNITÉS GÉOMÉTRIQUES  |                                  |  |                      |
| Surface                 | L <sup>2</sup>                   | centimètre carré                               | cm <sup>2</sup>      |
| Volume                  | L <sup>3</sup>                   | centimètre cube                                | cm <sup>3</sup>      |
| Angle                   | —                                | radian   | rad                  |
| II. UNITÉS CINÉMATIQUES |                                  |  |                      |
| Vitesse                 | LT <sup>-1</sup>                 | centimètre à la seconde                        | cm/s                 |
| Accélération            | LT <sup>-2</sup>                 | centimètre à la seconde<br>à la seconde ou gal | cm/s <sup>2</sup>    |
| Vitesse angulaire       | T <sup>-1</sup>                  | radian à la seconde                            | rad/s                |
| Accélération angulaire  | T <sup>-2</sup>                  | radian à la seconde<br>à la seconde            | rad/s <sup>2</sup>   |
| Débit en volume         | L <sup>3</sup> T <sup>-1</sup>   | cm <sup>3</sup> à la seconde                   | cm <sup>3</sup> /s   |
| III. UNITÉS DYNAMIQUES  |                                  |  |                      |
| Force, poids            | MLT <sup>-2</sup>                | dyne   |                      |
| Couple, moment          | ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>  | dyne-centimètre                                | dyne-cm              |
| Travail, énergie        | ML <sup>2</sup> T <sup>-2</sup>  | erg  |                      |
| Puissance               | ML <sup>2</sup> T <sup>-3</sup>  | erg à la seconde                               | erg/s                |
| Pression                | ML <sup>-1</sup> T <sup>-2</sup> | dyne au cm <sup>2</sup> ou barye               |                      |
| Masse spécifique        | ML <sup>-3</sup>                 | gramme au cm <sup>3</sup>                      | g/cm <sup>3</sup>    |
| Poids spécifique        | ML <sup>-2</sup> T <sup>-2</sup> | dyne au cm <sup>3</sup>                        | dyne/cm <sup>3</sup> |
| Moment d'inertie        | ML <sup>2</sup>                  | gramme-cm <sup>2</sup>                         | g-cm <sup>2</sup>    |
| Quantité de mouvement   | MLT <sup>-1</sup>                | gramme-cm à la seconde                         | g-cm/s               |
| Impulsion               | MLT <sup>-1</sup>                | dyne-seconde                                   | dyne-s               |

TABLEAU DES UNITÉS DU SYSTÈME M.Kf.S.  
(Système industriel)

| Grandeur                         | Dimensions                      | Unité   | Symbole                             |
|----------------------------------|---------------------------------|---|-------------------------------------|
| UNITÉS FONDAMENTALES             |                                 |   |                                     |
| Longueur                         | L                               | mètre   | m                                   |
| Force, poids                     | F                               | kilogramme  | kg*                                 |
| Temps                            | T                               | seconde   | s                                   |
| UNITÉS DÉRIVÉES                  |                                 |   |                                     |
| I. UNITÉS GÉOMÉTRIQUES           |                                 |   |                                     |
| Surface                          | L <sup>2</sup>                  | mètre carré   | m <sup>2</sup>                      |
| Volume                           | L <sup>3</sup>                  | mètre cube  | m <sup>3</sup>                      |
| Angle                            | —                               | radian  | rad                                 |
| II. UNITÉS CINÉMATIQUES          |                                 |   |                                     |
| Vitesse                          | LT <sup>-1</sup>                | mètre à la seconde  | m/s                                 |
| Accélération                     | LT <sup>-2</sup>                | mètre à la seconde<br>à la seconde  | m/s <sup>2</sup>                    |
| Vitesse angulaire                | T <sup>-1</sup>                 | radian à la seconde   | rad/s                               |
| Accélération angulaire           | T <sup>-2</sup>                 | radian à la seconde<br>à la seconde   | rad/s <sup>2</sup>                  |
| Débit en volume                  | L <sup>3</sup> T <sup>-1</sup>  | m <sup>3</sup> à la seconde   | m <sup>3</sup> /s                   |
| III. UNITÉS DYNAMIQUES           |                                 |   |                                     |
| Masse = $\frac{\text{Poids}}{g}$ | FL <sup>-1</sup> T <sup>2</sup> | L'unité de masse n'a<br>pas de nom particulier.<br>Elle est représentée par<br>la masse d'un corps qui<br>pèse $g = 9,806\ 65\ \text{kg}^*$ | U.M.<br>ou<br>kg*-s <sup>2</sup> /m |
| Couple, moment                   | FL                              | mètre-kilogramme  | m-kg*                               |
| Travail, énergie                 | FL                              | kilogrammètre   | kg*m                                |
| Puissance                        | FLT <sup>-1</sup>               | kilogrammètre à la se-<br>conde   | kg*m/s                              |
| Pression                         | FL <sup>-2</sup>                | kilogramme au m <sup>2</sup>  | kg*/m <sup>2</sup>                  |
| Masse spécifique                 | FL <sup>-4</sup> T <sup>2</sup> | U.M. au m <sup>3</sup>  | U.M./m <sup>3</sup>                 |
| Poids spécifique                 | FL <sup>-3</sup>                | kilogramme au m <sup>3</sup>  | kg*/m <sup>3</sup>                  |
| Moment d'inertie                 | FLT <sup>2</sup>                | U.M.-m <sup>2</sup>   | U.M.-m <sup>2</sup>                 |
| Quantité de mouvement            | FT                              | U.M.-mètre à la seconde   | kg*-s                               |
| Impulsion                        | FT                              | kilogramme-seconde  | kg*-s                               |

**Définition des principales unités. Unité d'angle.** — L'angle est l'espace compris entre deux droites qui se coupent. Pour un angle déterminé  $\widehat{AOB}$  (fig. 1), le rapport de l'arc  $s$  au rayon  $R$  est constant quel que soit le rayon  $R$ . Ce rapport  $\alpha = \frac{s}{R}$  est un nombre pur (donc indépendant de l'unité de longueur choisie) qui caractérise, en somme, l'angle et peut être pris pour sa mesure. Nous dirons alors que l'angle  $\widehat{AOB}$  vaut  $\alpha$  radians (rad).

Si l'angle  $\widehat{AOB}$  est tel que  $s = R$ , nous aurons :

$$\alpha = \frac{s}{R} = \frac{R}{R} = 1 \text{ rad.}$$

L'unité d'angle, le radian, est l'angle au centre qui intercepte sur la circonférence un arc égal au rayon :

$$\text{la circonférence} = \frac{s}{R} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi \text{ rad.}$$

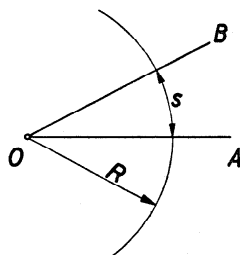


Fig. 1

L'emploi du radian, la seule unité cohérente ou absolue d'angle, est indispensable dans les formules de mécanique supposant des systèmes cohérents ou absolus d'unités, par exemple dans les formules exprimant une énergie en fonction d'un couple et d'un angle ou une puissance en fonction d'un couple et d'une vitesse angulaire.

**Unité de vitesse.** — La *vitesse* est le quotient de l'espace parcouru  $ds$  par le temps  $dt$  employé à le parcourir :  $v = \frac{ds}{dt}$ .

Le mouvement est *uniforme* si la vitesse  $v$  est constante. S'il en est ainsi, le mobile parcourt des espaces égaux dans des temps égaux, et l'espace  $s$  parcouru dans le temps  $t$  a pour valeur :

$$s = vt.$$

On a  $s = v$ , lorsque  $t = 1$  ; dans tout mouvement uniforme, la vitesse est l'espace parcouru pendant l'unité de temps.

On a  $v = 1$ , lorsque simultanément  $s = 1$  et  $t = 1$  ; dans tout système cohérent d'unités, l'unité de vitesse est la vitesse d'un mobile qui parcourt d'un mouvement uniforme l'unité de longueur pendant l'unité de temps.

Dans un mouvement non uniforme, la vitesse d'un mobile à un instant quelconque (vitesse instantanée ou vitesse vraie) est la vitesse du mouvement uniforme qui succéderait au mouvement vrai à cet instant, si

toute force extérieure cessait d'agir sur le mobile. Ainsi, dire qu'à un instant donné la vitesse d'un mobile est de 15 m/s, c'est dire que, si, à cet instant, le mouvement se maintenait uniforme pendant 1 s, le mobile parcourrait 15 m.

*Unité d'accélération.* — L'accélération est le quotient de la variation  $dv$  de la vitesse par le temps  $dt$  de cette variation :  $a = \frac{dv}{dt}$ . L'accélération mesure donc la rapidité de variation de la vitesse.

Le mouvement est *uniformément accéléré* si l'accélération est constante. S'il en est ainsi, la vitesse varie de quantités égales dans des temps égaux, et la variation de vitesse dans le temps  $t$  a pour valeur :

$$v = at.$$

On a  $v = a$ , lorsque  $t = 1$  ; dans tout mouvement uniformément accéléré, l'accélération est la variation de vitesse pendant l'unité de temps.

On a  $a = 1$ , lorsque simultanément  $v = 1$  et  $t = 1$  ; dans tout système cohérent d'unités, l'unité d'accélération est l'accélération d'un mouvement uniformément accéléré dans lequel la vitesse s'accroît de l'unité de vitesse pendant l'unité de temps.

Dans le système C.G.S., l'unité d'accélération est le centimètre à la seconde à la seconde ou *gal* (abréviation du nom de Galilée, qui a découvert les lois de la chute des corps) ; cette accélération est celle d'un mobile en mouvement uniformément accéléré dont la vitesse augmente de 1 cm/s en 1 seconde. Dans le système M.Kf.S., l'unité d'accélération est le mètre à la seconde à la seconde.

L'accélération a pour dimensions  $LT^{-2}$ . En effet :

$$[\text{Accélération}] = \frac{[\text{Vitesse}]}{[\text{Temps}]} = \frac{\frac{[\text{Longueur}]}{[\text{Temps}]}}{[\text{Temps}]} = \frac{\frac{L}{T}}{T} = LT^{-2}.$$

*Unité de vitesse angulaire.* — Dans un mouvement circulaire (mouvement de rotation), la *vitesse angulaire* est le quotient de l'angle  $d\alpha$  décrit par le rayon mobile par le temps  $dt$  mis pour décrire cet angle :  $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ .

Le mouvement de rotation est *uniforme* si la vitesse angulaire  $\omega$  est constante. S'il en est ainsi, le rayon mobile décrit des angles égaux dans des temps égaux, et l'angle  $\alpha$  décrit dans le temps  $t$  a pour valeur :

$$\alpha = \omega t.$$

On a  $\alpha = \omega$ , lorsque  $t = 1$  ; dans tout mouvement de rotation uniforme, la vitesse angulaire est l'angle décrit pendant l'unité de temps.



On a  $\omega = 1$ , lorsque simultanément  $\alpha = 1$  et  $t = 1$  ; dans tout système cohérent d'unités, l'unité de vitesse angulaire est la vitesse angulaire d'un mouvement de rotation uniforme dans lequel le rayon mobile décrit l'unité d'angle pendant l'unité de temps.

Dans un mouvement de rotation, un point situé à la distance  $R$  de l'axe de rotation a une vitesse  $v = \omega R$ . Cette vitesse  $v$  est souvent appelée *vitesse linéaire* par opposition à la vitesse angulaire.

*Unité d'accélération angulaire.* — L'accélération angulaire est le quotient de la variation  $d\omega$  de la vitesse angulaire par le temps  $dt$  de cette variation :  $\beta = \frac{d\omega}{dt}$ . L'accélération angulaire mesure la rapidité de variation de la vitesse angulaire.

Le mouvement de rotation est *uniformément accéléré* si l'accélération angulaire  $\beta$  est constante. S'il en est ainsi, dans le temps  $t$  la vitesse angulaire varie de :

$$\omega = \beta t.$$

On a  $\beta = 1$ , lorsque simultanément  $\omega = 1$  et  $t = 1$  ; dans tout système cohérent d'unités, l'unité d'accélération angulaire est l'accélération angulaire d'un mouvement de rotation uniformément accéléré dans lequel la vitesse angulaire s'accroît de l'unité de vitesse angulaire pendant l'unité de temps.

*Unité de force.* — On appelle *force* tout ce qui est capable de modifier en quoi que ce soit le mouvement ou la forme d'un corps.

Lorsqu'une force  $F$  meut un corps de masse  $m$ , elle lui imprime une accélération  $a$ . On a la relation fondamentale :

$$F = ma.$$

On a  $F = 1$ , lorsque simultanément  $m = 1$  et  $a = 1$  ; dans tout système cohérent d'unités, l'unité de force est la force qui, appliquée à l'unité de masse, lui imprime l'unité d'accélération.

Dans le système C.G.S., l'unité de force, qui est une unité dérivée, est la *dynes* : c'est la force qui, appliquée à une masse de 1 g, lui imprime une accélération de 1 cm/s<sup>2</sup>.

*Unité de travail et d'énergie.* — Au sens vulgaire du mot, la notion de *travail* comporte l'idée d'un *effort* exercé sur un corps qui *cède sous l'effort*. C'est ainsi que dans une machine à vapeur, la pression de la vapeur sur le piston produit un travail quand le piston cède sous cette pression.

Si le corps ne cède pas, il n'y a pas de travail ; un atelier dans lequel les machines restent immobiles ne travaille pas.

Les éléments essentiels qui interviennent dans tout travail sont la

force et le déplacement. D'une façon générale, chaque fois qu'une force  $F$  entraîne son point d'application d'une longueur  $l$  dans la direction de la force, elle effectue un travail  $W$  qui a pour expression le produit de la force par le déplacement :  $W = Fl$ .

On a  $W = 1$ , lorsque simultanément  $F = 1$  et  $l = 1$  ; dans tout système cohérent d'unités, l'unité de travail est le travail effectué par une force unité dont le point d'application se déplace de l'unité de longueur dans la direction de la force.

Dans le système C.G.S., l'unité de travail est l'*erg* : travail produit par une force de 1 dyne dont le point d'application se déplace de 1 cm dans la direction de la force.

Dans le système M.Kf.S., l'unité de travail est le *kilogrammètre* ( $\text{kg}^*\text{m}$ ) : travail produit par une force de 1  $\text{kg}^*$  dont le point d'application se déplace de 1 m dans la direction de la force.

*L'énergie en général.* — Le travail est une grandeur concrète qui tombe sous nos sens. On en a une concrétisation exacte dans le soulèvement d'un poids, par exemple. L'*énergie*, au contraire, est une grandeur abstraite et ne se manifeste à nous que lorsqu'elle se transforme en travail : elle est donc du travail en puissance, et un travail accompli est de l'énergie dépensée.

D'une façon générale, on dit qu'un corps possède de l'énergie lorsqu'il est susceptible de produire du travail, et on mesure cette énergie par le travail produit. *L'énergie s'exprime donc en unités de travail* : ergs, kilogrammètres, etc.

Des phénomènes très variés sont susceptibles de fournir du travail, et l'énergie qu'ils mettent en jeu peut prendre diverses formes. C'est ainsi que l'on distingue l'énergie mécanique, calorifique, chimique, électrique, rayonnante, atomique, etc.

Un corps peut être dans un état tel qu'il est capable d'effectuer du travail, alors qu'il n'en effectue pas réellement à l'instant où on le considère. Son énergie est alors *latente* ou *potentielle*. Tel est le cas de l'énergie emmagasinée dans un ressort qui reste tendu, dans un morceau de charbon qu'on ne brûle pas.

Toutes ces formes de l'énergie peuvent se transformer les unes dans les autres, c'est-à-dire que lorsque l'une d'elles disparaît, on en voit une autre apparaître, et les machines industrielles ne sont que des appareils à produire ces transformations. *Les êtres humains sont incapables de créer de l'énergie, ils peuvent seulement la transformer* ; ils l'empruntent toujours, en définitive, à quelque chose qui se transforme et dont l'énergie propre diminue.

Ces transformations obéissent au principe de la conservation de

*l'énergie*, un des mieux établis de la physique, qui dit : « L'énergie totale d'un système isolé demeure constante. » On entend, par « système isolé », un système qui n'échange aucune énergie avec l'extérieur.

*L'énergie mécanique.* — L'énergie mécanique que possède un corps peut être de deux sortes :

1° l'énergie qu'il possède en vertu de son mouvement, ou *énergie cinétique*. C'est l'énergie que l'on recueillerait si l'on arrêta ce corps, c'est-à-dire le travail qu'il produirait si sa vitesse venait à s'annuler. Sa valeur est  $\sum \frac{1}{2} mv^2$ . Exemple : énergie d'un projectile, d'un volant ;

2° l'énergie qu'il possède en vertu de sa situation, ou *énergie potentielle*. Cette énergie ne se manifeste que si l'on permet au corps d'obéir aux forces qui le sollicitent. Exemple : énergie d'un ressort tendu, d'un poids placé à une certaine hauteur et prêt à tomber, de l'eau accumulée dans un bassin, de l'air comprimé dans un réservoir.

La somme :

(énergie cinétique) + (énergie potentielle)

représente l'*énergie mécanique totale* du corps.

*Rendement d'une machine.* — Nous appelons *machine* tout système permettant de transformer d'une manière continue et régulière une forme de l'énergie en une autre forme appropriée au but particulier que l'on a en vue. Une machine est donc un *transformateur d'énergie*. Remarquons que l'énergie recueillie est avant tout une énergie *utile*.

Désignons par  $W_1$  l'énergie totale fournie à la machine pendant un certain temps, et par  $W_2$  l'énergie totale recueillie pendant le même temps. Si nous considérons le système formé par la ma-

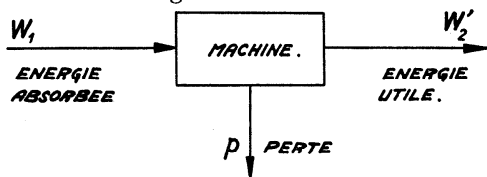


Fig. 2

chine et le milieu extérieur, le principe de la conservation de l'énergie permet d'écrire :  $W_1 = W_2$ . Mais en général, toute l'énergie recueillie n'est pas obtenue sous la forme utile désirée. Une partie seulement  $W_2'$  apparaît sous cette forme, tandis que l'autre partie  $p$  apparaît sous une autre forme quelconque, non utilisable, et constitue par conséquent un déchet, une *perte* (fig. 2). Nous avons donc :

$$W_1 = W_2' + p.$$

Or nous devons remarquer que, dans la plupart des cas, cette portion non utilisable  $p$  de l'énergie recueillie apparaît sous forme de chaleur.

La chaleur est donc comme une forme inférieure de l'énergie, puisque c'est cette forme que prennent de préférence les déchets de l'énergie. En quantité, c'est une forme équivalente aux autres; mais en qualité, en hiérarchie pour ainsi dire, c'est une forme moins élevée, *dégradée*.

D'une manière générale, nous dirons qu'une forme  $A$  de l'énergie est plus noble qu'une forme  $B$ , si la transformation intégrale est possible de  $A$  en  $B$ , mais non de  $B$  en  $A$ . Si l'énergie passe de la forme  $A$  à la forme  $B$ , nous dirons qu'elle se dégrade.

L'énergie cinétique et l'énergie potentielle, l'énergie mécanique et l'énergie électrique, etc. sont des formes d'énergie également nobles. Par contre, la chaleur est une forme d'énergie moins noble que l'énergie mécanique ou électrique, et d'autant moins noble qu'elle est à une température plus basse. C'est ainsi que le travail peut être intégralement transformé en chaleur si nous l'utilisons à produire des frottements (freins); mais inversement, il n'existe aucune machine, si parfaite soit-elle, capable de transformer intégralement la chaleur en travail.

Nous avons dit que toute transformation d'énergie ne peut s'effectuer sans une certaine perte qu'on s'efforcera de rendre aussi petite que possible. Nous appellerons *rendement* de la machine le rapport :

$$\eta = \frac{W'_2}{W_1}$$

de l'énergie utile recueillie à l'énergie totale absorbée.

Le rendement, quotient de deux grandeurs de même nature, est un nombre pur, sans dimensions. Ce nombre ne peut dépasser 1, et il est d'autant plus voisin de 1 que la machine est plus parfaite ou qu'elle est mieux utilisée. Le rendement est souvent exprimé en pour-cent :

$$\eta\% = \eta \cdot 100.$$

*Unité de puissance.* — Quand on veut caractériser un moteur, il ne suffit pas de dire quel travail il peut fournir; cela est dénué de signification; il faut ajouter *en quel temps* il est capable de l'effectuer.

On appelle *puissance* le travail produit par unité de temps. Une puissance  $P$  est donc le quotient d'un travail effectué  $W$  par le temps  $t$  employé à l'effectuer :

$$P = \frac{W}{t}.$$

On a  $P = 1$ , lorsque simultanément  $W = 1$  et  $t = 1$ ; dans tout système cohérent d'unités, l'unité de puissance est la puissance d'une machine qui produit l'unité de travail pendant l'unité de temps.

Dans le système C.G.S., l'unité de puissance est l'*erg* à la seconde (erg/s); dans le système M.Kf.S., le kilogrammètre à la seconde (kg\*m/s).

Une puissance est également le produit d'une force par une vitesse. Si le point d'application d'une force  $F$  se déplace avec la vitesse  $v$  dans la direction de la force, la puissance de cette force vaut :

$$P = Fv.$$

On a  $P = 1$ , lorsque simultanément  $F = 1$  et  $v = 1$  ; dans tout système cohérent d'unités, l'unité de puissance est également la puissance d'une force égale à l'unité de force dont le point d'application se déplace dans la direction de la force avec une vitesse égale à l'unité de vitesse.

Dans le système C.G.S., l'erg à la seconde est donc la puissance d'une force de 1 dyne dont le point d'application se déplace dans la direction de la force avec une vitesse de 1 cm/s. Dans le système M.Kf.S., le kilogrammètre à la seconde est la puissance d'une force de 1 kg\* dont le point d'application se déplace dans la direction de la force avec une vitesse de 1 m/s.

Dans l'ordre habituel d'exposition des principes de la mécanique, on rencontre successivement la force, le travail et la puissance. Un moteur donné peut exercer des forces aussi grandes que l'on veut, en utilisant une transmission convenable ; il peut produire le travail que l'on veut, en mettant plus ou moins de temps ; mais il est incapable de développer une puissance supérieure à une certaine limite. Par exemple, un moteur humain peut exercer des forces de milliers de kg\* en se servant d'un cric ou d'un palan (qui sont de simples transmetteurs), produire des millions de kilogrammètres en travaillant pendant des jours, mais il est incapable de développer une puissance de 1 cheval. C'est donc bien le travail dans l'unité de temps qui caractérise les conditions de fonctionnement d'un moteur et le mot « puissance » exprime parfaitement la signification de cette donnée, un moteur puissant étant celui qui fait beaucoup de travail en peu de temps.

*Unité de moment.* — Considérons un fil enroulé sur un tambour de rayon  $r$ , d'axe  $O$  (fig. 3). La traction  $F$  exercée sur le fil tend à faire tourner le tambour dans le sens de la flèche. Cette action dépend à la fois de l'intensité  $F$  de la force et du rayon  $r$  du tambour, c'est-à-dire du produit  $Fr$  de la force par son *bras de levier* par rapport au point  $O$ . Ce produit est appelé *moment de la force  $F$  par rapport au point  $O$*  (ou par rapport à l'axe  $O$  supposé perpendiculaire au plan de la figure).

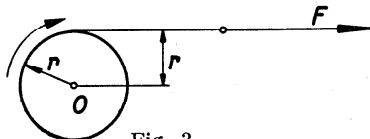


Fig. 3

Le moment d'une force par rapport à un point (ou par rapport à un axe passant par le point et perpendiculaire au plan formé par la force

et ce point) mesure en quelque sorte la possibilité qu'a cette force de faire tourner autour de ce point (ou autour de cet axe) le corps auquel elle est appliquée.

On obtiendrait la même action en faisant agir sur notre tambour un *couple*, soit deux forces égales, parallèles et de sens contraire, d'intensité  $\frac{F}{2}$  (fig. 4). En effet, le moment par rapport au point  $O$  de ce système de forces, ou *moment du couple*, égal à la somme des moments des deux forces par rapport à ce point, vaut également  $Fr$  :

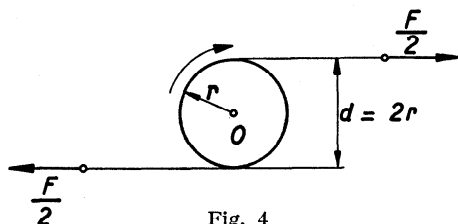


Fig. 4

$$\frac{F}{2} r + \frac{F}{2} r = Fr .$$

La distance  $d = 2r$  des lignes d'action des deux forces est le bras de levier du couple. On peut écrire :

$$Fr = \frac{F}{2} \cdot 2r = \frac{F}{2} \cdot d .$$

*Le moment du couple est égal au produit de l'intensité de l'une des deux forces par le bras de levier.* Ce moment ne dépend d'ailleurs plus de la position du point  $O$  (les distances du point  $O$  aux lignes d'action des deux forces n'interviennent plus dans la formule). On peut donc dire : le moment d'un couple mesure la possibilité qu'a ce couple de faire tourner le corps auquel il est appliqué autour d'un axe perpendiculaire à son plan.

Le moment d'une force et le moment d'un couple sont égaux l'un et l'autre au produit d'une force par une longueur. Ces moments ont donc les dimensions d'un travail. Mais tandis que la force et la longueur sont parallèles entre elles dans le cas d'un travail, elles sont perpendiculaires l'une à l'autre dans le cas d'un moment.

Un moment peut être exprimé en unités de travail, mais on préfère ne pas utiliser les mêmes unités pour bien marquer la distinction. C'est ainsi qu'on aura :

Système C.G.S.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{unité de travail : l'erg ;} \\ \text{unité de moment : le dyne-centimètre.} \end{array} \right.$

Système M.Kf.S.  $\left\{ \begin{array}{l} \text{unité de travail : le kilogrammètre (kg*m) ;} \\ \text{unité de moment : le mètre-kilogramme (m*kg*).} \end{array} \right.$

Un couple de moment  $C$  tournant d'un angle  $\alpha$  produit un travail  $W = C\alpha$ . On a donc :

$$C = \frac{W}{\alpha}.$$

Bien qu'un angle soit une grandeur sans dimensions, le moment d'un couple apparaît comme le quotient d'un travail par un angle évalué en radians. Le moment d'un couple devrait donc théoriquement s'exprimer en ergs par radian ou en kilogrammètres par radian, et non en ergs ou en kilogrammètres tout court. Cela justifie une fois de plus la distinction à faire entre les unités de travail et les unités de moment.

*Unité de pression.* — Dans le cas où une force  $F$  agit uniformément sur tous les points d'une surface  $S$ , on appelle *pression*  $p$  la force par unité de surface :  $p = \frac{F}{S}$ .

On a  $p = 1$ , lorsque simultanément  $F = 1$  et  $S = 1$  ; dans tout système cohérent d'unités, l'unité de pression est la pression uniforme qui, répartie sur l'unité de surface, produit un effort égal à l'unité de force.

Dans le système C.G.S., cette unité est la *barye*, pression d'une dyne au  $\text{cm}^2$ , et dans le système M.Kf.S., le *kilogramme* au  $\text{m}^2$ .

*Masse spécifique.* — La *masse spécifique* ou *densité absolue* d'un corps est la masse de l'unité de volume de ce corps.

*Poids spécifique.* — Le *poids spécifique* d'un corps est le poids de l'unité de volume de ce corps.

Dans la pratique, on donne souvent à l'expression « poids spécifique » le sens que l'on attache à l'expression « masse spécifique ».

*Densité relative.* — On appelle *densité* d'un corps  $A$  par rapport à un corps  $B$  le rapport de la masse d'un certain volume du corps  $A$  à la masse d'un volume égal du corps  $B$ . Il s'agit donc d'une *densité relative*. Lorsqu'on parle de la densité d'un corps sans autre indication, il est sous-entendu que cette densité est prise par rapport à l'eau.

La densité relative étant un simple rapport n'a pas de dimensions et est indépendante de toute unité.

La densité relative d'un gaz est toujours évaluée par rapport à l'air supposé pris dans les mêmes conditions de pression et de température que le gaz.

**Nécessité des unités secondaires.** — Dans les applications techniques où le choix d'un système particulier d'unités s'impose, certaines unités

de ce système sont peu commodes, soit parce qu'on ne se fait pas de leur valeur une image suffisamment simple, soit parce qu'elles sont très grandes ou très petites par rapport aux grandeurs à mesurer, introduisant ainsi dans les calculs des nombres peu maniables.

On est alors conduit à adjoindre au système d'unités proprement dit, pour certaines grandeurs, des *unités secondaires*, multiples ou sous-multiples plus ou moins simples des unités elles-mêmes.

L'usage d'unités secondaires fait perdre l'avantage de simplicité que présentaient les unités rationnelles en obligeant à introduire dans les formules des coefficients numériques étrangers. Pour réduire dans toute la mesure du possible les complications dues à l'introduction de ces coefficients, les unités secondaires sont, le plus souvent, des multiples ou sous-multiples *décimaux* des unités.

Les équations générales de la mécanique sont indépendantes du système d'unités choisi. Si donc, à côté d'une formule théorique, il n'y a pas lieu d'indiquer le système d'unités, il est par contre indispensable d'indiquer, à côté de chaque formule technique, les unités avec lesquelles les diverses grandeurs sont supposées mesurées.

TABLEAU DES MULTIPLES ET SOUS-MULTIPLES DÉCIMAUX

| Puissance de 10<br>par laquelle<br>est multipliée l'unité | Préfixe<br>à mettre avant<br>le nom de l'unité | Symbole<br>à mettre avant<br>celui de l'unité |
|---|--|---|
| $10^{12}$ = 1 trillion                                    | mégaméga, téra                                 | MM, T   |
| $10^9$ = 1 milliard                                       | kiloméga, giga                                 | kM, G   |
| $10^6$ = 1 million  | méga   | M   |
| $10^5$ = 100 000  | hectokilo                                      | hk  |
| $10^4$ = 10 000   | myria  | ma  |
| $10^3$ = 1 000  | kilo   | k   |
| $10^2$ = 100  | hecto  | h   |
| $10^1$ = 10   | déca   | da  |
| $10^0$ = 1  | —  | —   |
| $10^{-1}$ = 0,1   | déci   | d   |
| $10^{-2}$ = 0,01  | centi  | c   |
| $10^{-3}$ = 0,001   | milli  | m   |
| $10^{-4}$ = 0,000 1                                       | décimilli                                      | dm  |
| $10^{-5}$ = 0,000 01                                      | centimilli                                     | cm  |
| $10^{-6}$ = 0,000 001                                     | micro  | $\mu$   |
| $10^{-9}$ = 1 milliardième                                | millimicro, nano                               | m $\mu$ , n                                   |
| $10^{-12}$ = 1 trillionième                               | micromicro, pico                               | $\mu\mu$ , p                                  |



## Les unités secondaires des systèmes C.G.S. et M.Kf.S.

## 1. Longueur

| Dénomination            | Symbole | Valeur                                   |
|-------------------------|---------|--|
| Mégamètre               | Mm      | $10^6 \text{ m} = 1\,000\,000 \text{ m}$ |
| Kilomètre               | km      | $10^3 \text{ m} = 1\,000 \text{ m}$      |
| Hectomètre              | hm      | $10^2 \text{ m} = 100 \text{ m}$         |
| Décamètre               | dam     | $= 10 \text{ m}$                         |
| Mètre <sup>1</sup>      | m       | $= 1 \text{ m}$                          |
| Décimètre               | dm      | $10^{-1} \text{ m} = 0,1 \text{ m}$      |
| Centimètre <sup>2</sup> | cm      | $10^{-2} \text{ m} = 0,01 \text{ m}$     |
| Millimètre              | mm      | $10^{-3} \text{ m} = 0,001 \text{ m}$    |
| Décimillimètre          | dmm     | $10^{-4} \text{ m} = 0,1 \text{ mm}$     |
| Centimillimètre         | cmm     | $10^{-5} \text{ m} = 0,01 \text{ mm}$    |
| Micron                  | $\mu$   | $10^{-6} \text{ m} = 0,001 \text{ mm}$   |
| Millimicron             | m $\mu$ | $10^{-9} \text{ m} = 10^{-6} \text{ mm}$ |

<sup>1</sup> Base du système M.Kf.S.<sup>2</sup> Base du système C.G.S.

Pour exprimer les très petites longueurs, comme les longueurs d'onde, on utilise :

a) le *micron* ( $\mu$ ) ou millième de millimètre :

$$1 \mu = 10^{-3} \text{ mm} = 10^{-4} \text{ cm} = 10^{-6} \text{ m}.$$

b) l'*angström* ( $\text{\AA}$ ) ou dix-millième de micron :

$$1 \text{\AA} = 10^{-4} \mu = 10^{-8} \text{ cm} = 10^{-10} \text{ m}.$$

Longueur d'onde des radiations visibles :

$$\lambda = 0,39 \text{ à } 0,80 \mu \quad \text{ou} \quad 3900 \text{ à } 8000 \text{\AA}.$$

Pour la mesure des longueurs marines, on emploie le *mille marin*, longueur moyenne de la minute sexagésimale de méridien :

$$1 \text{ mille marin} = 1852 \text{ m}.$$

En astronomie, pour l'évaluation des grandes distances, on emploie les unités suivantes :

a) le *rayon équatorial terrestre*  $R_e$ , dont la longueur est fixée à 6378,388 km.

Distances moyennes de la Lune et du Soleil à la Terre :

$$60,27 R_e = 384,4 \cdot 10^3 \text{ km} \quad \text{et} \quad 23\,440 R_e = 149,5 \cdot 10^6 \text{ km} ;$$

b) le *trillion* de km =  $10^{12}$  km ;

c) l'*année-lumière* =  $9,46 \cdot 10^{12}$  km, qui représente la distance parcourue par la lumière en une année, à la vitesse de 300 000 km/s.

Distance de la Terre à l'étoile polaire : environ 46,5 années-lumière ;

d) le *parsec* =  $30,84 \cdot 10^{12}$  km = 3,26 années-lumière. C'est la distance d'une étoile dont la parallaxe est de 1''. On appelle parallaxe d'une étoile l'angle sous lequel un observateur placé au centre de l'étoile verrait le demi-grand axe de l'orbite terrestre.

## 2. Surface

| Dénomination  | Symbole          | Valeur  |
|---|------------------|---|
| Kilomètre carré   | km <sup>2</sup>  | 10 <sup>6</sup> m <sup>2</sup>                    |
| Hectomètre carré  | hm <sup>2</sup>  | 10 <sup>4</sup> m <sup>2</sup>                    |
| Décamètre carré   | dam <sup>2</sup> | 10 <sup>2</sup> m <sup>2</sup>                    |
| Mètre carré <sup>1</sup>  | m <sup>2</sup>   | 1 m <sup>2</sup> = 10 000 cm <sup>2</sup>         |
| Décimètre carré   | dm <sup>2</sup>  | 10 <sup>-2</sup> m <sup>2</sup>                   |
| Centimètre carré <sup>2</sup>   | cm <sup>2</sup>  | 10 <sup>-4</sup> m <sup>2</sup>                   |
| Millimètre carré  | mm <sup>2</sup>  | 10 <sup>-6</sup> m <sup>2</sup>                   |
| <sup>1</sup> Unité M.Kf.S. de surface, équivalente à la surface contenue dans un carré de 1 m de côté |                  |   |
| <sup>2</sup> Unité C.G.S. de surface, équivalente à la surface contenue dans un carré de 1 cm de côté |                  |   |
| MESURES AGRAIRES  |                  |   |
| Hectare   | ha               | 100 a = 1 hm <sup>2</sup> = 10 000 m <sup>2</sup> |
| Are   | a                | 1 dam <sup>2</sup> = 100 m <sup>2</sup>           |
| Centiare  | ca               | 0,01 a = 1 m <sup>2</sup>                         |

*Observation.* — Pour toute unité élevée à une certaine puissance, le préfixe s'applique à l'unité avant son élévation à cette puissance. Ainsi les expressions « millimètre carré » et « millimètre cube » ne signifient pas le millième d'un mètre carré et le millième d'un mètre cube, mais une

surface équivalente à celle d'un carré de 1 mm de côté et le volume contenu dans un cube de 1 mm de côté. On écrit simplement :

$$\text{mm}^2 \text{ pour } \overline{\text{mm}}^2 \quad \text{et} \quad \text{mm}^3 \text{ pour } \overline{\text{mm}}^3.$$

### 3. Volume

| Dénomination   | Symbole         | Valeur   |
|--|-----------------|--|
| Kilomètre cube   | km <sup>3</sup> | 10 <sup>9</sup> m <sup>3</sup>                     |
| Mètre cube <sup>1</sup>  | m <sup>3</sup>  | 1 m <sup>3</sup> = 10 <sup>6</sup> cm <sup>3</sup> |
| Décimètre cube   | dm <sup>3</sup> | 10 <sup>-3</sup> m <sup>3</sup>                    |
| Centimètre cube <sup>2</sup>   | cm <sup>3</sup> | 10 <sup>-6</sup> m <sup>3</sup>                    |
| Millimètre cube  | mm <sup>3</sup> | 10 <sup>-9</sup> m <sup>3</sup>                    |
| <sup>1</sup> Unité M.Kf.S. de volume, égale au volume contenu dans un cube de 1 m de côté<br><sup>2</sup> Unité C.G.S. de volume, égale au volume contenu dans un cube de 1 cm de côté |                 |  |
| MESURES DE CAPACITÉ POUR LES LIQUIDES, CÉRÉALES ET MATIÈRES PULVÉRULENTES  |                 |  |
| Hectolitre   | hl              | 100 l  |
| Décalitre  | dal             | 10 l   |
| Litre  | l               | 1 dm <sup>3</sup> par définition                   |
| Décilitre  | dl              | 0,1 l  |
| Centilitre   | cl              | 0,01 l   |
| Millilitre   | ml              | 0,001 l = 1 cm <sup>3</sup>                        |
| MESURAGE DES BOIS  |                 |  |
| Stère  | st              | 1 m <sup>3</sup> par définition                    |

Le *litre métrologique*, utilisé pour les mesures scientifiques de haute précision, est le volume occupé par une masse de 1 kg d'eau pure prise à son maximum de densité (4°C) et sous la pression atmosphérique normale de 760 mm Hg. Le volume du litre ainsi défini excède d'environ 27 mm<sup>3</sup> le décimètre cube :

$$1 \text{ litre métrologique} = 1,000\,027 \text{ dm}^3.$$

L'introduction d'une telle unité s'explique par le fait que la capacité d'un récipient se mesure très facilement à l'aide de pesées.

## 4. Angle

| Dénomination  | Symbole  | Valeur  |
|---|----------|---|
| Angle droit   | D        | Angle formé par deux droites se coupant sous des angles adjacents égaux |
| SYSTÈME SEXAGÉSIMAL<br>(employé en physique, mécanique, astronomie) |          |   |
| Degré   | °        | 1/90 D ; 1 D = 90°  |
| Minute (d'angle)  | '        | 1/60° ; 1° = 60'  |
| Seconde (d'angle)   | "        | 1/60' ; 1' = 60"  |
| La seconde est divisée en fractions décimales ou ordinaires.        |          |   |
| SYSTÈME CENTÉSIMAL<br>(employé en géodésie et en topographie)       |          |   |
| Grade   | gr       | 1/100 D ; 1 D = 100 gr  |
| Décigrade   | dgr      | 10 <sup>-1</sup> gr   |
| Centigrade<br>ou minute centésimale                                 | ', cgr   | 10 <sup>-2</sup> gr ; 1 gr = 100'                                       |
| Milligrade  | mgr      | 10 <sup>-3</sup> gr   |
| Décimilligrade<br>ou seconde centésimale                            | "', dmgr | 10 <sup>-4</sup> gr ; 1' = 100''  |

Nous avons les relations :

$$1 \text{ circonférence} = 2\pi \text{ radians} = 4 \text{ D} = 360^\circ = 400 \text{ gr},$$

$$\frac{\pi}{2} \text{ radians} = 1 \text{ D} = 90^\circ = 100 \text{ gr}.$$

## 5. Masse

| Dénomination        | Symbole | Valeur                               |
|---------------------|---------|--------------------------------------|
| Tonne               | t       | 1 000 kg                             |
| Quintal             | q       | 100 kg                               |
| Kilogramme          | kg      | 1 kg = 1 000 g                       |
| Hectogramme         | hg      | 0,1 kg = 100 g                       |
| Décagramme          | dag     | 0,01 kg = 10 g                       |
| Gramme <sup>1</sup> | g       | 0,001 kg = 1 g                       |
| Décigramme          | dg      | 0,1 g                                |
| Centigramme         | cg      | 0,01 g                               |
| Milligramme         | mg      | 0,001 g                              |
| Gamma               | γ       | 10 <sup>-6</sup> g ou millième de mg |

<sup>1</sup> Base du système C.G.S.

Dans le commerce des pierres précieuses, on emploie le *carat métrique* qui vaut 0,20 g. Le *grain*, quart du carat, donc égal à 0,05 g, est utilisé pour l'évaluation du poids des perles.

Nous avons, à très peu près :

$$\begin{aligned} 1 \text{ t} &\cong \text{masse de } 1 \text{ m}^3 \text{ d'eau ;} \\ 1 \text{ kg} &\cong \text{masse de } 1 \text{ dm}^3 \text{ d'eau ;} \\ 1 \text{ g} &\cong \text{masse de } 1 \text{ cm}^3 \text{ d'eau ;} \\ 1 \text{ mg} &\cong \text{masse de } 1 \text{ mm}^3 \text{ d'eau.} \end{aligned}$$

1 dm<sup>3</sup> d'eau prise à son maximum de densité (4°C) a pour masse 0,999 973 kg.

## 6. Temps

| Dénomination         | Symbole | Valeur                    |
|----------------------|---------|---------------------------|
| Jour                 | j       | 24 h = 1440 mn = 86 400 s |
| Heure                | h       | 60 mn = 3 600 s           |
| Minute               | mn, m   | 60 s                      |
| Seconde <sup>1</sup> | s       | 1 s                       |

<sup>1</sup> Base des systèmes C.G.S. et M.Kf.S.

Au-dessous de la seconde, on compte par fractions décimales.

Le symbole m pour désigner la minute peut être employé lorsqu'il ne saurait y avoir d'ambiguïté, par exemple lorsque le temps exprimé comprend des heures, ou des secondes, en même temps que des minutes.

La durée de révolution de la Terre autour de son axe est l'étalon naturel de temps. Sa valeur est :

$$1 \text{ jour sidéral} = 86\,164,0906 \text{ s.}$$

## 7. Vitesse

Le *kilomètre à l'heure* vaut 0,278 m/s. Nous avons la relation :

$$(\text{vitesse en km/h}) = 3,6 \times (\text{vitesse en m/s}).$$

Le *nœud* est l'unité dont on se sert pour mesurer la vitesse des navires ou des courants. Un navire file 1 nœud si sa vitesse est de 1 mille marin à l'heure :

$$1 \text{ nœud} = 1,852 \text{ km/h} = 0,514 \text{ m/s}.$$

## 8. Vitesse angulaire

La vitesse angulaire s'exprime fréquemment en *tours à la seconde* ou en *tours à la minute*.

Si une machine fait  $n$  tours à la seconde ou  $N$  tours à la minute, sa vitesse angulaire en radians à la seconde vaudra :

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi N}{60}.$$

### 9. Force, poids

| Dénomination            | Symbole | Valeur                           |
|-------------------------|---------|----------------------------------|
| SYSTÈME C.G.S.          |         |                                  |
| Mégadyne                |         | $10^6$ dynes $\cong$ 1,02 kg*    |
| SYSTÈME M.Kf.S.         |         |                                  |
| Tonne                   | t*      | 1 000 kg*                        |
| Kilogramme <sup>1</sup> | kg*     | 1 kg* $\cong$ 981 000 dynes      |
| Gramme                  | g*      | $10^{-3}$ kg* $\cong$ 981 dynes  |
| Milligramme             | mg*     | $10^{-6}$ kg* $\cong$ 0,981 dyne |

<sup>1</sup> Base du système M.Kf.S.

### 10. Travail, énergie

| Dénomination             | Symbole | Valeur                                    |
|--------------------------|---------|---|
| SYSTÈME C.G.S.           |         |   |
| Joule                    | J       | $10^7$ ergs                               |
| Kilojoule                | kJ      | 1 000 J                                   |
| Watt-heure               | Wh      | 3 600 J                                   |
| Kilowatt-heure           | kWh     | 1 000 Wh                                  |
| SYSTÈME M.Kf.S.          |         |   |
| Cheval-heure             | ch-h    | 270 000 kg*m                              |
| UNITÉS CALORIFIQUES      |         |   |
| Calorie <sup>1</sup>     | cal     | $\frac{3600}{860}$ J = $\frac{1}{860}$ Wh |
| Kilocalorie <sup>2</sup> | kcal    | 1 000 cal = $\frac{1}{860}$ kWh           |

<sup>1</sup> Anciennement *calorie-gramme* ou *petite calorie* : quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1° C la température d'une masse de 1 gramme d'eau

<sup>2</sup> Anciennement *calorie-kilogramme* ou *grande calorie* : quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1° C la température d'une masse de 1 kilogramme d'eau

Le watt-heure, le kilowatt-heure et le cheval-heure représentent le travail ou l'énergie fourni pendant une heure par une machine dont la puissance est de 1 watt, 1 kilowatt ou 1 cheval.

### 11. Puissance

| Dénomination    | Symbole | Valeur                                |
|-----------------|---------|---------------------------------------|
| SYSTÈME C.G.S.  |         |                                       |
| Watt            | W       | $10^7 \text{ ergs/s} = 1 \text{ J/s}$ |
| Kilowatt        | kW      | $1\,000 \text{ W} = 1 \text{ kJ/s}$   |
| SYSTÈME M.Kf.S. |         |                                       |
| Cheval          | ch      | $75 \text{ kg*m/s}$                   |

Le *cheval* ou *cheval-vapeur* (ch, CV) ne doit pas être confondu avec le *horse-power* (HP) anglais qui vaut  $76,04 \text{ kg*m/s}$ .

Le horse-power, censé représenter la puissance que peut développer, pendant un court intervalle de temps, un fort cheval, est défini comme valant 550 foot-pounds à la seconde. Or  $1 \text{ foot} = 0,3048 \text{ m}$  et  $1 \text{ pound} = 0,453\,59 \text{ kg*}$ , donc :

$$1 \text{ HP} = 550 \cdot 0,3048 \cdot 0,453\,59 = 76,04 \text{ kg*m/s}$$

ou

$$1 \text{ HP} = 1,014 \text{ ch.}$$

### 12. Pression

| Dénomination  | Symbole                  | Valeur   |
|---|--------------------------|--|
| SYSTÈME C.G.S.  |                          |  |
| Mégabarye ou bar  |                          | $10^6 \text{ baryes} \cong 1,02 \text{ kg*}/\text{cm}^2$ |
| Millibar  |                          | $10^{-3} \text{ bar} \cong 1,02 \text{ g*}/\text{cm}^2$  |
| Le bar et le millibar sont surtout utilisés pour exprimer la pression atmosphérique et ses variations |                          |  |
| SYSTÈME M.Kf.S.   |                          |  |
| Kilogramme au $\text{cm}^2$   | $\text{kg*}/\text{cm}^2$ | $10^4 \text{ kg*}/\text{m}^2$                            |
| Kilogramme au $\text{mm}^2$   | $\text{kg*}/\text{mm}^2$ | $10^6 \text{ kg*}/\text{m}^2$                            |

La pression peut également être évaluée :

1° en *hauteur de mercure*. On convient de prendre la température de 0° C et de donner à  $g$  sa valeur normale. Le mercure se trouvant dans ces conditions est appelé « mercure normal » (poids spécifique : 13,5951 kg\*/dm<sup>3</sup>).

Le *millimètre* ou le *centimètre de mercure* (mm Hg ou cm Hg) est la pression exercée sur sa base par une colonne de mercure normal ayant 1 mm ou 1 cm de hauteur. Le millimètre de mercure est parfois désigné sous le nom de torr (du physicien Torricelli, 1608-1647) ;

2° en *hauteur d'eau*. Dans l'industrie, on évalue souvent les pressions soit en *mètres d'eau*, soit en *centimètres d'eau*, soit en *millimètres d'eau*. On a :

$$10 \text{ mètres d'eau} \cong 1 \text{ kg}^*/\text{cm}^2,$$

$$1 \text{ millimètre d'eau} \cong 1 \text{ kg}^*/\text{m}^2 ;$$

3° l'*atmosphère* ou *pression atmosphérique normale* est une pression de 760 millimètres de mercure :

$$\begin{aligned} 1 \text{ atmosphère} &= 760 \text{ mm Hg} \\ &= 1,013 \text{ 2 bar} \\ &= 1,033 \text{ 2 kg}^*/\text{cm}^2 . \end{aligned}$$

### Tableaux comparatifs des principales unités

#### Comparaison des unités de force

|            |                                    |           |             |
|------------|------------------------------------|-----------|-------------|
| 1 kg*      | = 980,665 · 10 <sup>3</sup> dynes  | ≅ 981 000 | dynes       |
| 1 g*       | = 980,665                          | dynes     | ≅ 981 dynes |
| 1 mg*      | = 980,665 · 10 <sup>-3</sup> dynes | ≅         | 0,981 dyne  |
| 1 mégadyne | = 1,019 716 kg*                    | ≅         | 1,02 kg*    |
| 1 dyne     | = 1,019 716 mg*                    | ≅         | 1,02 mg*    |

Accélération normale de la pesanteur :  $g = 9,806 \text{ 65 m/s}^2$

$$\frac{1}{g} = 0,101 \text{ 971 6}$$



*Comparaison des unités de travail et d'énergie*

| Nom           | Erg<br>(C.G.S.)     | Joule     | Watt-heure                | Kilogrammètre<br>(M.Kf.S.) | Calorie                |
|---------------|---------------------|-----------|---------------------------|----------------------------|------------------------|
| Erg           | 1                   | $10^{-7}$ | $27,778 \cdot 10^{-12}$   | $10,197 \cdot 10^{-9}$     | $23,889 \cdot 10^{-9}$ |
| Joule         | $10^7$              | 1         | $0,277\ 78 \cdot 10^{-3}$ | 0,101 97                   | $238,89 \cdot 10^{-3}$ |
| Watt-heure    | $36 \cdot 10^9$     | 3600      | 1                         | 367,1                      | 860                    |
| Kilogrammètre | $98,067 \cdot 10^6$ | 9,8067    | $2,7241 \cdot 10^{-3}$    | 1                          | 2,3427                 |
| Calorie       | $41,860 \cdot 10^6$ | 4,1860    | $1,1628 \cdot 10^{-3}$    | 0,426 86                   | 1                      |

*Comparaison des unités de puissance*

| Nom                           | Erg/s<br>(C.G.S.)   | Watt      | Kilowatt               | Kilogrammètre<br>à la seconde<br>(M.Kf.S.) | Cheval                 |
|-------------------------------|---------------------|-----------|------------------------|--|------------------------|
| Erg/s                         | 1                   | $10^{-7}$ | $10^{-10}$             | $10,197 \cdot 10^{-9}$                     | —                      |
| Watt                          | $10^7$              | 1         | $10^{-3}$              | 0,101 97                                   | $1,3596 \cdot 10^{-3}$ |
| Kilowatt                      | $10^{10}$           | $10^3$    | 1                      | 101,97                                     | 1,3596                 |
| Kilogrammètre<br>à la seconde | $98,067 \cdot 10^6$ | 9,8067    | $9,8067 \cdot 10^{-3}$ | 1  | 0,013 333              |
| Cheval                        | —                   | 735,5     | 0,7355                 | 75   | 1                      |

*Comparaison des unités de pression*

| Nom                            | Bar                    | Kilogramme<br>au $\text{cm}^2$ | Millimètre<br>de mercure | Atmosphère             |
|--------------------------------|------------------------|--------------------------------|--------------------------|------------------------|
| Bar                            | 1                      | 1,0197                         | 750,06                   | 0,9869                 |
| Kilogramme<br>au $\text{cm}^2$ | 0,9807                 | 1                              | 735,56                   | 0,9678                 |
| Millimètre<br>de mercure       | $1,3332 \cdot 10^{-3}$ | $1,3595 \cdot 10^{-3}$         | 1                        | $1,3158 \cdot 10^{-3}$ |
| Atmosphère                     | 1,0132                 | 1,0332                         | 760                      | 1                      |

**Choix d'un système d'unités.** — Les unités de certaines grandeurs une fois fixées, les unités des autres grandeurs ne peuvent plus être choisies de façon quelconque si on tient à avoir des *unités cohérentes*, et *c'est seulement avec de telles unités que les formules de la mécanique s'écrivent sous leur forme à la fois la plus générale et la plus simple*, sans présence d'un facteur numérique étranger différent de l'unité.

C'est ainsi qu'en adoptant le système C.G.S. mais avec le millimètre comme unité de longueur, l'unité cohérente de force ne pourrait plus être la dyne mais la force qui, appliquée à une masse de 1 g, lui communiquerait une accélération de  $1 \text{ mm/s}^2$ . Cette unité cohérente de force vaudrait 0,1 dyne.

Toutefois, en adoptant un système millimètre, gramme-masse, seconde, rien ne nous empêche de prendre la dyne comme unité *secondaire* de force. Mais ce choix implique que les formules de la mécanique dans lesquelles intervient la force ne s'écriront plus sous leur forme la plus simple; il exige l'introduction d'un facteur numérique étranger  $k$  différent de l'unité. C'est ainsi que la formule fondamentale de la dynamique :

$$F = ma$$

deviendrait dans notre cas particulier :

$$F = k \cdot ma = 0,1 \text{ ma}.$$

Cette dernière formule a le désavantage de ne plus être générale, mais valable uniquement pour des unités non cohérentes qu'il y a lieu de spécifier, ici la force  $F$  en dynes, la masse  $m$  en grammes et l'accélération  $a$  en  $\text{mm/s}^2$ .

Comme autre exemple, on considérera la formule qui donne le moment élastique d'un spiral de montre de section droite rectangulaire :

$$C = \frac{Ehe^3}{12L}.$$

Cette formule suppose l'emploi d'unités cohérentes, par exemple, dans le système C.G.S. :

moment élastique  $C$  du ressort en dynes-cm/rad,  
module d'élasticité  $E$  de la matière en dynes/cm<sup>2</sup>,  
dimensions  $e, h, L$  du ressort en cm ;

dans le système M.Kf.S. :

moment élastique  $C$  du ressort en m-kg\*/rad,  
module d'élasticité  $E$  de la matière en kg\*/m<sup>2</sup>,  
dimensions  $e, h, L$  du ressort en m.

Ces dernières unités sont peu commodes et il serait plus indiqué ici d'adopter les unités *secondaires* suivantes :

$C$  en g\*-mm/rad ;  $E$  en kg\*/cm<sup>2</sup> ;  $e, h, L$  en mm.

Ces unités n'étant plus cohérentes, il est nécessaire d'introduire dans notre formule un facteur numérique  $k$  qu'il est facile de calculer en partant des relations :

$$\begin{aligned} 1 \text{ kg}^*/\text{cm}^2 &= 10^4 \text{ kg}^*/\text{m}^2, \\ 1 \text{ mm} &= 10^{-3} \text{ m}, \\ 1 \text{ g}^*\text{-mm/rad} &= 10^{-6} \text{ m-kg}^*/\text{rad}. \end{aligned}$$

On obtient :

$$C = k \frac{Ehe^3}{12L} = 10 \frac{Ehe^3}{12L}.$$

Cette formule n'est plus générale puisqu'elle n'est valable qu'avec les unités non cohérentes spécifiées ci-dessus.

La formule  $P = C\omega$ , qui donne la puissance d'un corps en rotation, s'applique sans autre avec des unités cohérentes. C'est ainsi qu'on aurait, dans le système C.G.S. :

puissance  $P$  en ergs/s,  
couple  $C$  en dynes-cm,  
vitesse angulaire  $\omega$  en rad/s ;

dans le système M.Kf.S. :

puissance  $P$  en  $\text{kg}^*\text{m/s}$ ,  
couple  $C$  en  $\text{m}\cdot\text{kg}^*$ ,  
vitesse angulaire  $\omega$  en  $\text{rad/s}$ .

En introduisant dans notre formule un facteur numérique étranger  $k$ , rien ne nous empêche de faire usage d'unités non cohérentes. C'est ainsi qu'on aurait :

$$P = k \cdot C \omega = \frac{2\pi}{60 \cdot 75} C \omega,$$

en exprimant la puissance  $P$  en chevaux, le couple  $C$  en  $\text{m}\cdot\text{kg}^*$  et la vitesse angulaire  $\omega$  en tours/mn.

Deux systèmes cohérents d'unités viennent d'être cités : les systèmes C.G.S. et M.Kf.S. Il en existe d'autres, mais comme les mécaniciens et les physiciens, les horlogers peuvent très bien se contenter de ces deux systèmes sans chercher à vouloir en imposer un troisième à eux.

Lequel de ces deux systèmes faut-il utiliser ? Existe-t-il des raisons qui militent plutôt en faveur de l'un que de l'autre ? A notre avis, dès qu'on aborde des problèmes de dynamique, c'est-à-dire chaque fois qu'intervient la masse ou le moment d'inertie, il faut adopter le système C.G.S. ; les calculs en seront facilités.

On rendra plus commode l'usage du système M.Kf.S. en se contentant des unités secondaires de ce système. C'est ainsi par exemple qu'on exprimera les longueurs en mm, les forces en  $\text{g}^*$ , les moments en  $\text{g}^*\cdot\text{mm}$ , etc.

On n'oubliera pas que l'emploi d'unités non cohérentes, telles les unités secondaires des deux systèmes, oblige à introduire dans les formules générales de la mécanique des facteurs numériques étrangers. Le calcul de ces facteurs peut présenter une certaine difficulté et demande beaucoup d'attention. Il est recommandé d'indiquer à côté de chaque formule technique ainsi obtenue les unités à employer.

**Introduction du système d'unités Giorgi.** — En 1935, la Commission électrotechnique internationale a adopté un système d'unités dérivant d'un système proposé par le professeur Giorgi, en 1901, et basé sur les quatre unités fondamentales suivantes :

unité de longueur : le *mètre* (m),  
unité de masse : le *kilogramme* (kg),  
unité de temps : la *seconde* (s),

plus une unité électrique prise parmi les unités dites *pratiques*.

Ce système, dit *système Giorgi à quatre dimensions* ou *système M.K.S.*, peut être considéré comme le système unifié de l'avenir. Il a le grand avantage d'englober dans un ensemble complet et cohérent, à la fois, les unités mécaniques et les unités électriques dites pratiques : ampère, coulomb, volt, ohm, joule, watt, etc. En outre, ses deux premières unités fondamentales ne sont autres que les unités principales du système métrique international définies par les étalons prototypes du mètre et du kilogramme.

*Unité de force.* — L'unité de force, qui est une unité dérivée, est le *newton* (symbole : N). C'est la force qui communique à 1 kg une accélération de 1 m/s<sup>2</sup>. On a :

$$1 \text{ newton} = 10^5 \text{ dynes} \cong 0,102 \text{ kg}^*$$

et par conséquent :

$$1 \text{ dyne} = 10^{-5} \text{ N}, \quad 1 \text{ kg}^* \cong 9,81 \text{ N}.$$

Le newton reste donc d'un ordre de grandeur suffisamment voisin de celui du kg\* pour ne présenter aucun inconvénient et pour être parfaitement utilisable en mécanique.

*Unité de pression.* — Cette unité est le *newton par m<sup>2</sup>*. On a :

$$\begin{aligned} 1 \text{ N/m}^2 &= 10 \text{ baryes} \cong 1,02 \cdot 10^{-5} \text{ kg}^*/\text{cm}^2, \\ 1 \text{ kg}^*/\text{cm}^2 &\cong 98 \, 100 \text{ N/m}^2. \end{aligned}$$

*Unité de travail ou d'énergie.* — L'unité de travail est le joule (J) qui se définit mécaniquement comme étant le travail effectué par une force de 1 newton dont le point d'application se déplace de 1 m dans la direction de la force :

$$1 \text{ joule} = 10^7 \text{ ergs} \cong 0,102 \text{ kg}^*\text{m}.$$

*Unité de puissance.* — L'unité de puissance est le *watt* (W) ou joule par seconde :

$$1 \text{ watt} = 10^7 \text{ ergs/s} \cong 0,102 \text{ kg}^*\text{m/s}.$$

Ainsi, dans le système Giorgi, de nouvelles unités n'interviennent que pour la force et la pression, les autres étant déjà connues et employées. Il est impossible de les écarter, car elles doivent remplacer la dyne et la dyne au cm<sup>2</sup> du système C.G.S., ou le kilogramme-force et le kilogramme-force au m<sup>2</sup> du système M.Kf.S. On évite de cette manière la double signification du terme « kilogramme », tantôt unité de masse, tantôt unité de force, ce qui n'est certes pas à regretter.



## CHAPITRE II

### LE TEMPS

**La mesure du temps.** — Si, en un lieu donné, un phénomène se reproduit plusieurs fois de suite de la même manière et dans des circonstances identiques, on peut considérer comme égaux les temps pendant lesquels il s'est manifesté successivement.

La durée d'un tel phénomène peut être utilisée comme unité de temps.

Ce phénomène peut être l'oscillation d'un pendule ou celle d'un balancier, l'écoulement d'un liquide ou celui d'une substance solide divisée en parties très petites, le mouvement de la Terre autour de son axe. Dans tous ces cas, il s'agit d'un mouvement ; ceux que nous avons énumérés sont utilisés dans les pendules, les montres, les clepsydres, les sabliers, les gnomons ou les cadrans solaires.

On pourrait aussi utiliser d'autres phénomènes, par exemple la perte de poids d'un corps par combustion ou par rayonnement radioactif.

Mesurer une durée, c'est la comparer à la durée du phénomène choisi comme définissant l'unité. On cherche à savoir combien de fois la première durée contient la seconde.

**Rappel de quelques notions de cosmographie.** — Les unités de temps que nous utilisons sont déduites de la durée de deux phénomènes astronomiques : la révolution de la Terre autour du Soleil et la rotation de la Terre autour de son axe.

Rappelons ici quelques notions de cosmographie qui vont nous permettre de comprendre les principes sur lesquels repose la mesure du temps.

La position d'un point  $P$  situé à la surface de la Terre est déterminée par deux grandeurs que nous définirons plus loin.

Abstraction faite des irrégularités de sa surface, la Terre peut être considérée comme un ellipsoïde de révolution de centre  $O$  (fig. 5) ; elle

tourne d'un mouvement uniforme autour d'un axe  $SN$  passant par son centre de gravité  $O$ .

La figure 6 représente un ellipsoïde beaucoup plus aplati que la Terre qui, elle, ne diffère que très peu d'une sphère (fig. 7).

Les dimensions de la Terre sont (fig. 6) :

demi-grand axe  $a = OA = OB = 6\,378\,388\text{ m}$ ,

demi-petit axe  $b = ON = OS = 6\,356\,912\text{ m}$ ,

$$\text{aplatissement } \alpha = \frac{a - b}{a} = \frac{1}{297}.$$

**Les coordonnées terrestres.** — Le méridien du point  $P$  (fig. 5) est la courbe  $NPS$ , intersection de l'ellipsoïde terrestre et du plan  $NOSP$ ; il coupe l'équateur  $EE'$  en  $C$ . Le plan de l'équateur est perpendiculaire à la ligne des pôles  $NS$ .

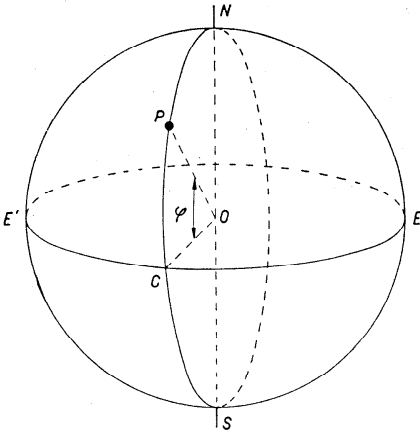


Fig. 5

Le plan du méridien contient naturellement la verticale de  $P$  qui coupe la sphère céleste au *zénith*.

L'angle  $COP = \varphi$  est appelé la *latitude* de  $P$ ; il indique la distance angulaire de  $P$  à l'équateur. Il est compté de  $0$  à  $90^\circ$  de l'équateur au pôle; la latitude est *boréale* pour les points situés au nord de l'équateur, et *australe* pour les points situés au sud.

La *longitude* de  $P$  est l'angle formé par le plan du méridien de  $P$  avec celui d'un méridien pris comme origine et appelé *premier méridien*.

Le premier méridien passe par l'Observatoire de Greenwich.

Les longitudes sont comptées de  $0$  à  $180^\circ$  et affectées du signe  $+$  ou de la lettre  $W$ , à l'ouest, et du signe  $-$  ou de la lettre  $E$ , à l'est du premier méridien. Ainsi la longitude de l'Observatoire de Paris est  $2^\circ 20' 14'' E$ , celle de l'Observatoire de Genève  $6^\circ 9' 8'' E$ , celle de l'Observatoire de Neuchâtel  $6^\circ 57' 27'' E$ .

**Position d'un corps céleste.** — Pour définir la position d'un corps céleste (le Soleil, une planète, une étoile fixe), on considère une sphère de rayon quelconque, la *sphère céleste*. La position de l'astre  $E$  est celle



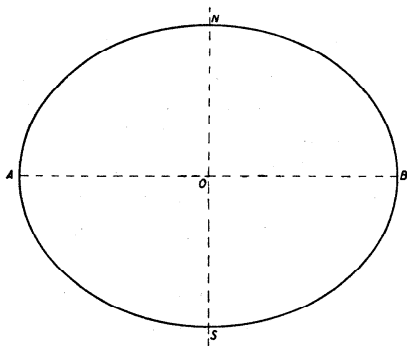


Fig. 6

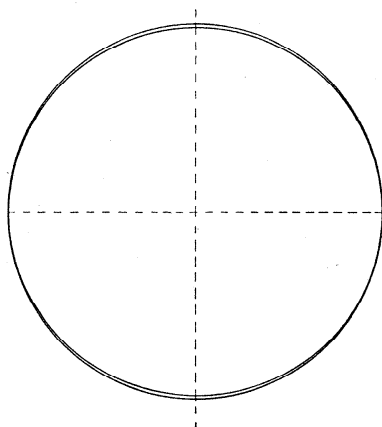


Fig. 7

de sa projection  $E'$  (fig. 8) sur la sphère céleste à partir du centre de la sphère qui est aussi le point d'observation  $P$ .

Le plan parallèle à l'équateur et passant par  $P$  coupe la sphère céleste suivant un grand cercle  $QQ$  qui est l'équateur céleste.

La parallèle à l'axe de la Terre et passant par  $P$  coupe la sphère céleste en  $N$  et  $S$ , les pôles célestes.

**Les coordonnées équatoriales.** — On peut déterminer la position de  $E'$  par rapport à l'équateur céleste; on obtient les *coordonnées équatoriales* qui sont semblables à la longitude et à la latitude avec lesquelles nous avons défini la position du point  $P$  sur la Terre.

La latitude s'appelle ici *déclinaison*: c'est l'angle  $CPE'$  compté de  $0$  à  $90^\circ$  à partir de l'équateur.

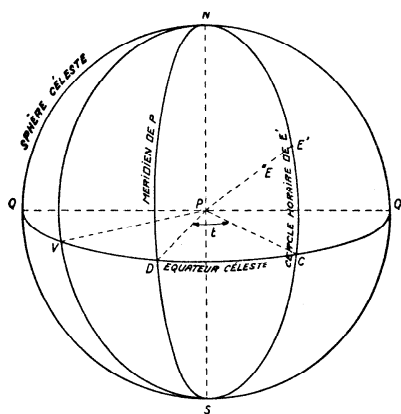


Fig. 8

Le grand cercle de la sphère céleste passant par les pôles  $N$  et  $S$  et par  $E'$  est le *cercle horaire* de  $E'$ .

On définit la position du cercle horaire de  $E'$  en choisissant un premier cercle horaire comme on a choisi sur la Terre un premier méridien.

Le premier cercle horaire peut être celui qui se trouve dans le plan du méridien de  $P$  et qu'on appelle le méridien de  $P$ .

L'angle horaire de  $E'$  est l'angle  $t = DPC$  que fait le cercle horaire de  $E'$  avec le méridien de  $P$ . On le

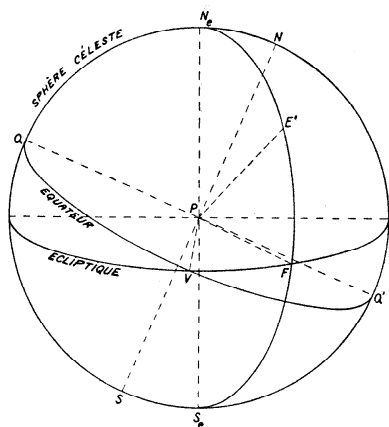


Fig. 9

Soit  $V$  (fig. 8) le point vernal ; l'angle  $VPC$  s'appelle l'*ascension droite* de  $E'$  ; il est compté sur l'équateur à partir du point vernal  $V$  de  $0$  à  $360^\circ$  dans le sens direct (d'occident en orient).

La déclinaison et l'ascension droite sont les *coordonnées équatoriales célestes* ; elles ont l'avantage d'être indépendantes du lieu d'observation.

On compte aussi l'angle horaire et l'ascension droite de  $0$  à  $24$  heures ;  $24$  heures correspondent à  $360^\circ$ ,  $1$  heure à  $15^\circ$ .

**Les coordonnées écliptiques.** — On rapporte parfois la position de la projection d'un astre sur la sphère céleste au plan de l'*écliptique*, plan de l'orbite terrestre ou de la trajectoire apparente du Soleil. Ce plan est incliné de  $23^\circ 27'$  environ sur l'équateur.

La perpendiculaire en  $P$  au plan de l'écliptique coupe la sphère céleste en deux points  $N_e$  et  $S_e$  (fig. 9) qui sont les pôles de l'écliptique.

L'équateur et l'écliptique se coupent en deux points dont l'un  $V$  est le point vernal.

La *longitude céleste* d'un point  $E'$  de la sphère céleste est l'angle  $VPF$  des grands cercles passant par les pôles de l'écliptique et contenant respectivement le point vernal  $V$  et le point  $E'$ . On le compte sur l'écliptique à partir du point vernal dans le sens direct de  $0$  à  $360^\circ$ .

La *latitude céleste* du point  $E'$  est l'angle  $FPE'$  du rayon aboutissant au point  $E'$  avec le plan de l'écliptique ; on le compte à partir de l'écliptique de  $0$  à  $90^\circ$  dans les deux sens, positivement vers le pôle boréal  $N_e$ , négativement vers le pôle austral  $S_e$ .

**Périhélie et aphélie.** — Lorsque la Terre décrit son orbite (une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers) autour du Soleil, les deux astres ne

compte sur l'équateur de  $0$  à  $360^\circ$  dans le sens rétrograde (c'est-à-dire d'orient en occident) à partir du point d'intersection  $D$  de l'équateur avec le demi-méridien limité à la ligne des pôles qui contient la verticale de  $P$ .

La déclinaison et l'angle horaire sont les *coordonnées équatoriales horaires*.

On choisit parfois pour premier cercle horaire celui qui passe par le *point vernal*, ou équinoxe du printemps, c'est-à-dire par le point où la trajectoire apparente du Soleil passe de l'hémisphère austral à l'hémisphère boréal.

sont pas toujours à la même distance l'un de l'autre. La Terre est au *périhélie* lorsqu'elle est le plus rapprochée du Soleil ; à l'*aphélie* quand elle en est le plus éloignée.

**Les unités de temps.** — L'unité de temps est la durée d'un phénomène, naturel ou non, que nous pouvons considérer comme régulier.

De même que pour les longueurs, il n'est pas possible de nous contenter d'une seule unité parce que les durées à mesurer sont très différentes les unes des autres. Nous avons besoin de grandes unités (semaine, mois, année, siècle) et d'unités plus petites (jour, heure, minute, seconde).

Quelle que soit l'unité choisie, il est important de la définir exactement.

Les *unités de base* sont définies à partir de la durée de phénomènes naturels. La durée de la rotation de la Terre autour de son axe a permis de définir le *jour* ; celle du mouvement de la Terre autour du Soleil nous donne l'*année*.

**Le jour.** — Comment constaterons-nous que la Terre a exécuté un tour complet autour de son axe ? Si nous étions en dehors de la Terre, nous dirions que la Terre a exécuté une rotation sur son axe dans l'intervalle séparant deux passages consécutifs d'un point A de la Terre dans un plan que nous aurions convenablement choisi et défini.

Puisque nous participons au mouvement de la Terre, nous observons le passage d'un point que nous avons des raisons de considérer comme fixe (ou suffisamment fixe pour notre dessein) dans un plan défini, le plan du méridien du lieu d'observation. Nous savons que ce plan est déterminé par les deux pôles et le lieu d'observation. Le point fixe semble traverser le plan du méridien une fois dans un sens, une fois dans le sens opposé : nous distinguerons le *passage supérieur* et le *passage inférieur*.

**Le jour sidéral.** — Le *jour sidéral* est la durée qui s'écoule entre deux passages supérieurs consécutifs d'une étoile fixe bien définie au méridien du lieu d'observation. Le jour sidéral est considéré comme constant. En réalité, il est variable, mais sa variation est si faible qu'on n'en tient compte que dans les mesures extrêmement précises faites au moyen des instruments les plus perfectionnés. Le jour sidéral est indépendant du lieu d'observation.

Le jour sidéral est égal à la durée de rotation de la Terre autour de son axe.

On voit que la mesure du temps repose sur le postulat suivant : *la vitesse de rotation de la Terre autour de son axe est constante.*

Le jour sidéral est divisé en 24 heures sidérales ; chaque heure sidérale contient 60 minutes sidérales dont chacune est divisée en 60 secondes sidérales.

On appelle *intervalle de temps sidéral* un intervalle mesuré en heures, minutes et secondes sidérales.

Les unités mentionnées sont toujours de même durée, quelle que soit l'étoile qui a servi à l'observation, que ce soit une étoile de la Grande Ourse, Véga de la Lyre ou Capella, par exemple. Ceci est évident puisque les étoiles sont supposées fixes et que leur déplacement apparent n'est que le résultat de la rotation de la Terre autour de son axe.

En réalité, les astronomes utilisent des étoiles dont le déplacement apparent est plus grand que celui des étoiles situées près du pôle.

Pour caractériser un *instant* d'un jour sidéral, il faut fixer le commencement de ce jour. On admettra que le jour est compté à partir du passage supérieur de l'étoile  $\alpha$  dans le plan du méridien du lieu d'observation : un instant sera désigné, par exemple, par 6 h 20 m 30 s sidérales si, entre le passage supérieur de  $\alpha$  et cet instant, 6 h 20 m 30 s sidérales se sont écoulées. On dira qu'en cet instant, il est 6 h 20 m 30 s sidérales. On conçoit que ce nombre d'heures, minutes et secondes aurait été tout différent, si nous avions choisi une autre étoile comme étoile de référence.

Pour fixer un instant quelconque de façon claire et univoque, il faut d'abord définir le commencement du jour sidéral. On a adopté la définition suivante :

*le jour sidéral commence au moment du passage du point vernal dans le plan du méridien du lieu d'observation.*

Le commencement du jour sidéral dépend du lieu d'observation ; l'heure qui caractérise un instant donné diffère donc d'un méridien à l'autre :

*l'heure sidérale est une heure locale.*

**Le jour solaire vrai et le jour solaire moyen.** — Au lieu d'une étoile quelconque, on peut choisir le Soleil comme étoile de référence.

L'unité de temps est alors le *jour solaire vrai*, c'est-à-dire la durée entre deux passages supérieurs consécutifs du centre du Soleil<sup>1</sup> dans le plan du méridien du lieu d'observation.

Le jour solaire vrai n'est pas commode pour la mesure du temps parce que sa durée est variable. Les variations sont importantes puisque la différence entre le jour le plus long et le jour le plus court est de l'ordre d'une minute. Au jour solaire vrai on substitue le *jour solaire moyen*

<sup>1</sup> Pour simplifier, on parle souvent du passage du Soleil ; il est entendu qu'il s'agit du passage du centre du Soleil.

qui serait donné par un Soleil fictif — le Soleil moyen — parcourant l'équateur avec une vitesse constante dans le même temps que le Soleil réel parcourt l'écliptique. La caractéristique du Soleil moyen est d'avoir un angle horaire  $\alpha$  (fig. 10) variant de façon régulière.

Lorsqu'on détermine l'heure par l'observation du Soleil, on obtient l'heure solaire vraie. Mais on utilise l'heure solaire moyenne. Pour passer du temps vrai au temps moyen, il faut connaître la différence entre les deux heures pour le jour et l'instant de l'observation.

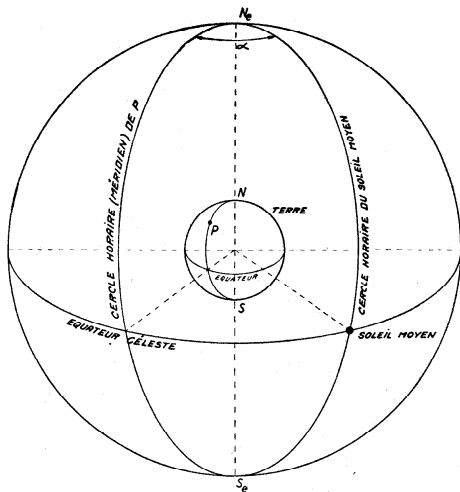


Fig. 10

**L'équation du temps.** — C'est la différence entre le temps solaire moyen et le temps solaire vrai à un instant donné.

Soient  $t_m$  et  $t_v$  les temps solaires moyen et vrai ; à midi moyen le 15 avril 1947, l'équation du temps, c'est-à-dire  $t_m - t_v$ , est ainsi établie : si le passage du Soleil au méridien a lieu à 12 h 11 m 20 s temps moyen, cela signifie qu'à midi vrai, il est 12 h 11 m 20 s temps moyen :

$$t_m = 12 \text{ h } 11 \text{ m } 20 \text{ s}, \quad t_v = 12 \text{ h}.$$

L'équation du temps est :

$$t_m - t_v = + 11 \text{ m } 20 \text{ s}.$$

Les éphémérides (*Annuaire du Bureau des longitudes*, *Connaissance des Temps*, *Nautical Almanach*, *Berliner astronomisches Jahrbuch*) donnent l'équation du temps pour chaque jour de l'année.

Dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes*, elle est donnée indirectement par l'indication du temps légal au moment du passage du Soleil au méridien de Paris.

On lit, par exemple, dans l'*Annuaire* pour l'an 1942, que le passage du Soleil au méridien de Paris, le 10 mai 1942, a lieu à :

$$11 \text{ h } 46 \text{ m } 58 \text{ s temps légal}.$$

On peut déduire de cette indication l'équation du temps pour le 10 mai 1942, en raisonnant comme suit : le temps légal en France est en retard de 9 m 21 s sur le temps moyen de Paris ; donc :

$$11 \text{ h } 46 \text{ m } 58 \text{ s temps légal} = 11 \text{ h } 56 \text{ m } 19 \text{ s temps moyen de Paris}.$$

Or, c'est l'heure du passage du Soleil au méridien de Paris, c'est-à-dire midi vrai. Nous aurons donc :

$$t_m = 11 \text{ h } 56 \text{ m } 19 \text{ s}, \quad t_v = 12 \text{ h}.$$

Le 10 mai 1942, l'équation du temps est :

$$t_m - t_v = -3 \text{ m } 41 \text{ s}.$$

Dans le *Nautical Almanach* et dans le *Berliner astronomisches Jahrbuch*, l'équation du temps est définie : la différence entre le temps vrai et le temps moyen, soit  $t_v - t_m$ . Elle a donc le signe contraire de celui de l'équation du temps donnée par les éphémérides françaises.

**Calcul et représentation graphique de l'équation du temps.** — L'équation du temps  $E$ , étant la différence entre le temps moyen et le temps vrai, serait égale à zéro si le temps vrai coïncidait avec le temps moyen. Mais on sait que la longueur des jours solaires vrais varie constamment, de sorte que  $E$  est différent de zéro sauf quatre fois par an (15 avril, 14 juin, 1<sup>er</sup> septembre et 25 décembre). L'équation du temps a deux maxima (11 février, 26 juillet) et deux minima (14 mai, 3 novembre).

L'équation du temps varie d'un jour à l'autre ; sa variation reste sensiblement la même d'une année à l'autre. On peut la représenter par une courbe : sur la figure 11, la courbe en trait plein.

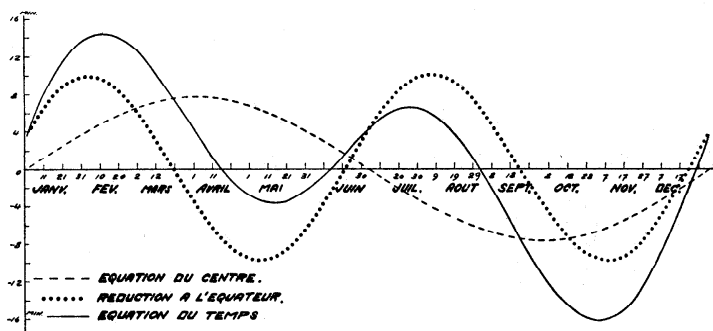


Fig. 11

Cette courbe montre la valeur considérable que peut atteindre  $E$ , qui varie de  $+14 \text{ m } 20 \text{ s}$  à  $-16 \text{ m } 23 \text{ s}$ .

Les causes de la variation du jour solaire vrai, c'est-à-dire les causes de l'équation du temps, sont l'irrégularité de la vitesse de translation de la Terre autour du Soleil et l'inclinaison de l'écliptique sur le plan de l'équateur.

D'après la deuxième loi de Képler (loi des aires), le rayon vecteur d'une planète, par exemple de la Terre, balaye des aires égales en des

temps égaux. Mais le rayon vecteur, c'est-à-dire le rayon qui joint la Terre au Soleil, a une longueur variable puisque la Terre décrit une ellipse dont le Soleil occupe un des foyers (première loi de Képler); il faut donc que la Terre ait une vitesse d'autant plus grande que le rayon vecteur est plus petit. La vitesse de translation est maximum quand la Terre est au périhélie.

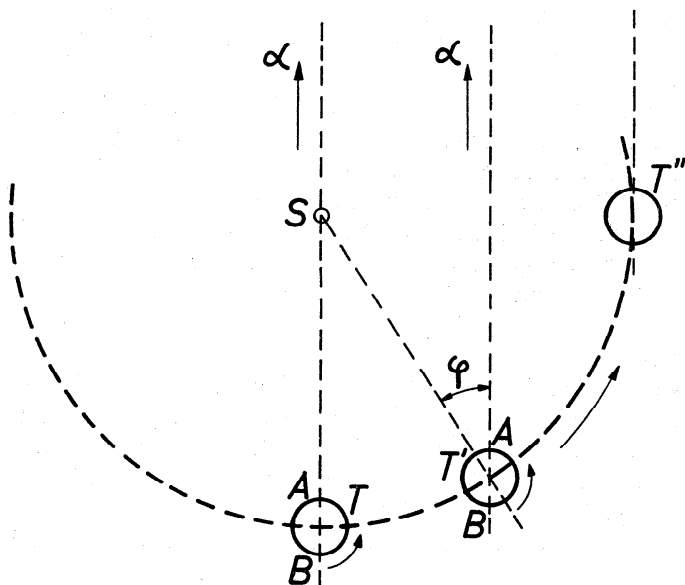


Fig. 12

La Terre exécute deux mouvements: une rotation autour de son axe et une translation le long de son orbite elliptique. Pendant la durée d'une rotation complète de la Terre autour de l'axe, le centre de la Terre a décrit l'arc  $TT'$  (fig. 12). Pour les hommes qui sont sur le méridien  $AB$ , il est midi vrai quand le centre de la Terre est en  $T$ . Supposons qu'en cet instant une étoile  $\alpha$  se trouve aussi dans le plan du méridien (cette étoile ne pourrait être visible que lors d'une éclipse du Soleil). Quand le centre de la Terre est en  $T'$ , l'étoile  $\alpha$  se retrouve de nouveau dans le plan du méridien  $AB$ : il s'est écoulé un jour sidéral. Mais le Soleil n'est pas encore dans le plan de  $AB$ : il faut que le méridien, c'est-à-dire la Terre, tourne encore de l'angle  $\varphi$  pour qu'il soit de nouveau midi vrai.

Ce raisonnement montre que le jour sidéral est plus court que le jour solaire vrai dont la longueur dépend de la distance  $TT'$  parcourue par la Terre en un jour, c'est-à-dire de la vitesse de translation de la Terre.

La variation du jour solaire vrai, que nous venons d'expliquer, disparaîtrait si nous avions un Soleil fictif parcourant l'écliptique à vitesse constante ; ce jour solaire fictif serait cependant plus long que le jour sidéral.

Mais nous rapportons la mesure du temps au méridien et pour avoir des jours vraiment égaux, nous envisageons un Soleil, que nous appelons le Soleil moyen, qui parcourt l'équateur à vitesse constante et dans le même temps que met le Soleil réel pour parcourir l'écliptique à vitesse variable.

En passant du Soleil fictif décrivant l'écliptique à vitesse constante au Soleil moyen, nous avons une autre cause d'inégalité qui s'ajoute à la première. Ces deux inégalités sont représentées dans la figure 11 ; la courbe pointillée, nommée équation du centre, figure celle qui provient de la vitesse irrégulière de translation de la Terre, tandis que la courbe ponctuée, appelée réduction à l'équateur, est l'inégalité provoquée par l'inclinaison de l'écliptique sur l'équateur. La somme de ces deux inégalités, représentée par la courbe en trait plein, est l'équation du temps.

Nous avons admis que le Soleil fictif passe au périhélie en même temps que le Soleil réel, tandis que le Soleil moyen passe au point vernal en même temps que le Soleil fictif. Cette convention explique pourquoi, dans la figure 11, la courbe représentant l'équation du centre coupe l'axe au 1<sup>er</sup> janvier, c'est-à-dire au moment de la plus courte distance de la Terre au Soleil, tandis que la courbe de réduction à l'équateur coupe l'axe le 21 mars à l'équinoxe de printemps.

**Les différents temps.** — On peut désigner un instant donné de différentes manières :

en *temps sidéral*, c'est-à-dire en jours, heures, minutes et secondes sidérales ; le temps sidéral est un temps local qui dépend du méridien du lieu d'observation ;

en *temps solaire vrai*, au moyen des unités de temps solaire vrai ;

en *temps solaire moyen*, en utilisant les jours, heures, minutes et secondes de temps solaire moyen.

Le temps solaire vrai et le temps solaire moyen sont aussi des temps locaux.

Le temps sidéral est compté de 0 à 24 h à partir du moment du passage supérieur du point vernal dans le plan du méridien du lieu d'observation.

Le temps solaire vrai et le temps solaire moyen sont comptés de 0 à 24 h à partir du moment du passage supérieur du Soleil réel ou du Soleil moyen dans le plan du méridien du lieu d'observation.



Le *temps moyen civil* se distingue du temps moyen qui vient d'être défini et qu'on appelle *temps moyen astronomique* en ce qu'il est compté à partir du moment du *passage inférieur* du Soleil moyen au méridien. Le jour civil est divisé en 2 fois 12 heures. Cependant les compagnies de transport ont l'habitude de noter les heures de 0 à 24; cette manière de faire s'introduit peu à peu dans les mœurs.

Les temps sidéral, solaires vrai ou moyen sont différents pour deux points de la Terre qui ne sont pas sur le même méridien. Quand on chemine dans une direction autre que la direction nord-sud, on devrait constamment remettre sa montre à l'heure.

Le *temps moyen local* n'est pas commode pour les relations entre les hommes puisqu'il varie d'un endroit à un autre.

L'application du *temps universel*, c'est-à-dire du temps moyen pour un méridien donné, par exemple pour celui de Greenwich, à toute la Terre présente aussi des inconvénients puisque midi n'aurait plus rien à voir avec la position du Soleil dans le ciel.

On a choisi un moyen terme et l'on a divisé le globe terrestre en 24 *fuseaux horaires*, chacun limité par deux méridiens dont la différence de longitude est de  $15^\circ$  ou 1 h ( $15^\circ \cdot 24 = 360^\circ$ ). Le méridien médian d'un fuseau, c'est-à-dire l'axe du fuseau, est à  $7^\circ 30'$  des méridiens extrêmes (fig. 13).

Le méridien de l'Observatoire de Greenwich est le *méridien international*; il est en même temps l'axe du premier fuseau appelé fuseau de l'Europe occidentale. A l'est se trouve le fuseau de l'Europe centrale dont l'axe est à  $15^\circ$  à l'est du méridien international.

Tous les points d'un même fuseau ont l'heure du méridien médian, qui diffère de celle des fuseaux voisins de 1 heure: elle est en avance par rapport au fuseau voisin situé à l'ouest.

Chaque pays a adopté l'heure d'un fuseau, sauf les Pays-Bas et certains grands pays comme l'U. R. S. S., les Etats-Unis, la Chine, le Canada, dont les différences de longitude sont trop considérables et qui se rattachent à plusieurs fuseaux. Depuis 1914, plusieurs pays ont une heure d'été différente de l'heure de leur fuseau horaire.

Le temps du fuseau adopté par un pays est le *temps légal* de ce pays.

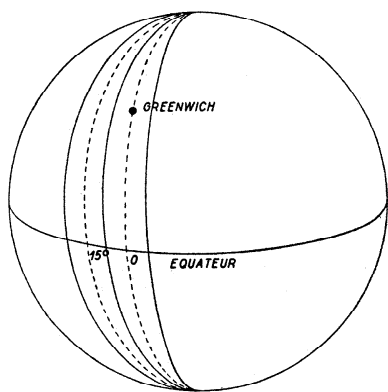


Fig. 13

**Transformation du temps solaire vrai en temps solaire moyen et inversement.** — Pour passer d'un temps solaire à l'autre, il suffit de connaître l'équation du temps  $E$  :

$$E = t_m - t_v,$$

d'où les formules de transformation :

$$t_m = t_v + E, \quad t_v = t_m - E.$$

Les valeurs  $t_m$  et  $t_v$  doivent être exprimées dans un même système, par exemple en temps moyen de Genève ou en temps légal de la Suisse.

Dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes*, on trouve des renseignements permettant de calculer  $E$  pour chaque jour de l'année. Ainsi l'*Annuaire* pour l'an 1942 indique, pour le passage du Soleil au méridien de Paris, le 30 avril 1942 :

11 h 47 m 52 s temps légal.

Or, le temps légal en France retarde de 9 m 21 s sur le temps moyen de Paris. D'autre part, par définition, le 30 avril 1942 le Soleil a passé au méridien de Paris à 12 h temps solaire vrai. Le passage du Soleil au méridien a donc eu lieu à :

11 h 47 m 52 s temps légal

ou à :

11 h 47 m 52 s + 9 m 21 s = 11 h 57 m 13 s temps moyen de Paris.

On a ainsi :

$$t_v = 12 \text{ h}, \quad t_m = 11 \text{ h } 57 \text{ m } 13 \text{ s},$$

d'où :

$$E = t_m - t_v = -2 \text{ m } 47 \text{ s}.$$

Si l'on a souvent à effectuer de tels calculs, on peut les rendre plus faciles au moyen d'une formule qui, naturellement, ne vaut que pour les données de l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*.

Soit  $t_l$  le temps légal du passage du Soleil au méridien tel qu'il est donné dans l'*Annuaire*. On a :

$$t_m = t_l + 9 \text{ m } 21 \text{ s}$$

et par suite :

$$E = t_l + 9 \text{ m } 21 \text{ s} - 12 \text{ h},$$

soit :

$$\underline{\underline{E = t_l - 11 \text{ h } 50 \text{ m } 39 \text{ s} .}}$$

Si l'on utilise d'autres éphémérides, il faut faire bien attention à la définition de l'équation du temps qui n'est pas partout la même ainsi qu'on l'a vu ci-dessus.

**Transformation du temps moyen en temps sidéral et inversement.** — Le jour sidéral est plus court que le jour solaire vrai et que le jour solaire moyen : nous savons pourquoi.

Nous référant à la figure 12, supposons que la Terre soit arrivée en  $T''$  après avoir parcouru le quart de son orbite : l'angle  $\varphi$  est égal à  $90^\circ$  et quand la Terre sera revenue en  $T$ , cet angle sera de  $360^\circ$  ; pendant la durée de la révolution complète de la Terre autour du Soleil, le méridien a passé  $n$  fois devant l'étoile  $\alpha$  et  $n - 1$  fois devant le Soleil.

Appelons *année tropique* le temps que met le Soleil entre deux passages consécutifs au point vernal et introduisons les notations suivantes :

$$\begin{array}{ll} j_m : \text{jour solaire moyen,} & t_m : \text{temps moyen,} \\ j_s : \text{jour sidéral,} & t_s : \text{temps sidéral.} \end{array}$$

L'année tropique contient  $n$  jours sidéraux et  $n - 1$  jours solaires moyens,  $n = 366,2422$ . Donc :

$$366,2422 j_s = 365,2422 j_m,$$

d'où :

$$1 j_s = \frac{365,2422}{366,2422} = 0,997\,269\,5 j_m$$

ou

$$1 j_m = \frac{366,2422}{365,2422} = 1,002\,737\,9 j_s.$$

Transformons le jour sidéral en 86 400 secondes sidérales, nous trouvons :

$$1 j_m = 86\,636,56 \text{ s de } t_s ;$$

ainsi le jour solaire moyen est plus long que le jour sidéral de :

$$236,56 \text{ s de } t_s = 3 \text{ m } 56 \text{ s, } 56 \text{ de } t_s.$$

Un calcul analogue permet de dire que le jour sidéral est plus court que le jour solaire moyen de :

$$235,91 \text{ s de } t_m = 3 \text{ m } 55 \text{ s, } 91 \text{ de } t_m.$$

Les astronomes déterminent généralement l'heure en observant une étoile située assez loin du pôle. Ils ont des horloges donnant l'heure sidérale telle que nous l'avons définie, c'est-à-dire le nombre d'heures,

minutes et secondes sidérales écoulées depuis le passage du point vernal au méridien du lieu d'observation. Ils notent l'heure sidérale au moment du passage d'une étoile déterminée au méridien. Après quoi ils transforment cette heure sidérale en heure légale, laquelle est donnée par toutes les horloges du pays.

Ils ont donc constamment à résoudre un problème tel que le suivant :

Quelle est l'heure légale à Neuchâtel le 7 décembre 1942 à 20 h 18 m 13 s, 7 de  $t_s$  ?

Dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* pour l'an 1942, nous apprenons que le temps sidéral à 0 h (méridien de Greenwich), le 7 décembre, est :

$$5 \text{ h } 0 \text{ m } 32 \text{ s.}$$

A 0 h méridien de Greenwich, il est 1 h temps légal à Neuchâtel, dont la longitude est 0 h 27 m 49 s, 8 E. Mais l'ascension droite du Soleil moyen varie en 24 heures de 3 m 56 s, 55 de  $t_s$ , ce qui donne en une heure une variation de  $\frac{236,55}{24} = 9,8565 \text{ s.}$

Pour ramener le temps sidéral de Greenwich à celui d'un lieu de longitude  $L$ , il faut tenir compte de la variation du temps sidéral et soustraire du temps sidéral de Greenwich la valeur  $9,8565 L$ , où la longitude  $L$  doit être exprimée en heures.

Pour Neuchâtel :  $L = 27 \text{ m } 49 \text{ s}, 8 = 0,46383 \text{ h.}$  La correction est donc :

$$9,8565 \cdot 0,46383 = 4,57 \text{ s de } t_s.$$

Ainsi, quand il est 1 h temps légal à Neuchâtel, il est :

$$5 \text{ h } 0 \text{ m } 32 \text{ s} - 4 \text{ s}, 57 + 0 \text{ h } 27 \text{ m } 49 \text{ s}, 8 = 5 \text{ h } 28 \text{ m } 17 \text{ s}, 23 \text{ de } t_s.$$

Entre cette heure et celle de l'observation, il s'est écoulé :

$$20 \text{ h } 18 \text{ m } 13 \text{ s}, 7 - 5 \text{ h } 28 \text{ m } 17 \text{ s}, 23 = 14 \text{ h } 49 \text{ m } 56 \text{ s}, 47 \text{ de } t_s.$$

Transformons cette durée en temps moyen, nous obtenons :

$$14 \text{ h } 47 \text{ m } 31 \text{ s}, 07 \text{ de } t_m.$$

L'heure légale à Neuchâtel correspondant à 20 h 18 m 13 s, 7 de  $t_s$  est :

$$\underline{\underline{15 \text{ h } 47 \text{ m } 31 \text{ s}, 07.}}$$

**Transformation des angles en heures, minutes et secondes.** — La Terre a tourné d'un angle  $\alpha$  sur son axe ; combien de temps a-t-elle mis ?

*En temps sidéral.* — La Terre exécute une révolution, c'est-à-dire  $360^\circ$ , en un jour sidéral ou en 86 400 secondes sidérales. Pour parcourir  $\alpha^\circ$ , la Terre met :

$$\frac{86\,400 \cdot \alpha}{360} \text{ secondes sidérales.}$$

*En temps moyen.* — En un jour sidéral, le Soleil dans son mouvement apparent décrit un angle de :

$$\frac{360}{1,002\,738} \text{ degrés.}$$

Mais  $1\ j_s = 86\,400\ s$  de  $t_s = \frac{86\,400}{1,002\,738}\ s$  de  $t_m$ . Donc en  $\frac{86\,400}{1,002\,738}\ s$

de  $t_m$ , le Soleil moyen décrit un angle de  $\frac{360}{1,002\,738}$  degrés. Pour décrire un angle  $\alpha^\circ$ , le Soleil moyen met :

$$\frac{\frac{86\,400}{1,002\,738} \alpha}{\frac{360}{1,002\,738}} = \frac{86\,400 \alpha}{360} \text{ s de } t_m.$$

*Le temps utilisé par la Terre pour tourner d'un angle  $\alpha^\circ$  est donc exprimé par le même nombre d'heures, de minutes et de secondes en temps sidéral que le temps moyen mis par le Soleil pour décrire le même angle.*

Ce résultat, qui peut paraître paradoxal, provient du fait que le Soleil moyen met plus de temps qu'une étoile entre deux passages supérieurs consécutifs au méridien, mais ce temps est exprimé en unités moyennes qui sont plus longues, dans la même proportion, que les unités sidérales.

**La détermination des longitudes au moyen des chronomètres.** — La longitude d'un lieu dépend de la position du premier méridien ; la différence des longitudes entre deux lieux est indépendante de cette position.

Pour connaître la position d'un navire en mer, c'est-à-dire pour « faire le point », le marin détermine les coordonnées géographiques du lieu occupé par le navire : la latitude et la longitude.

La détermination de la latitude est un problème astronomique dont nous n'avons pas à nous occuper ici.

Pour obtenir la longitude d'un point, on détermine par exemple la différence des longitudes de ce point et du port de départ.

A cause de la rotation de la Terre autour de son axe, une étoile se trouve successivement dans le plan de tous les méridiens. Le temps qu'elle

met pour passer d'un méridien à un autre correspond à l'angle des deux méridiens, c'est-à-dire à la différence de leurs longitudes. Ainsi l'étoile semble parcourir en 24 heures sidérales un angle de  $360^\circ$ ; en une heure sidérale, un angle de  $15^\circ$ .

La longitude et la différence de longitudes sont souvent données en heures, minutes et secondes. La longitude de Genève étant  $6^\circ 9' 8''$  E ou 24 m 36 s, 5, et celle de Neuchâtel  $6^\circ 57' 27''$  E ou 27 m 49 s, 8, la différence de longitude entre Genève et Neuchâtel est  $48' 19''$  ou 3 m 13 s, 3.

La différence de longitudes de deux lieux est la différence entre les heures de passage d'une étoile aux méridiens de ces deux lieux. Si le passage au point *A* a lieu avant le passage au point *B*, *A* est à l'est de *B*.

Si, au lieu d'une étoile, on observe le Soleil ainsi que le font souvent les marins au moyen du sextant, on obtient l'heure locale. La détermination de la différence des longitudes entre *A* et *B* revient à déterminer la différence des heures locales de *A* et de *B*, ou la différence entre l'heure locale de *A* en temps vrai au moment du passage du Soleil au méridien de *B* et 12 heures.

Mais en mer, si l'on est en *B*, on ne peut pas déterminer l'heure locale de *A* quand le Soleil passe au méridien. Pour connaître cette heure, on transporte un chronomètre indiquant l'heure locale de *A*. On obtient ainsi la différence des longitudes en heures, minutes et secondes; cette différence est un angle qui peut être exprimé en unités de temps sidéral ou de temps moyen.

Le chronomètre que le marin emporte avec lui indique généralement le temps moyen de Greenwich; par l'observation du Soleil en *B*, le navigateur obtient la différence de longitudes entre *B* et Greenwich, c'est-à-dire la longitude de *B* puisque le premier méridien passe par Greenwich.

En un lieu *B* sur mer, le marin observe, par exemple, le 1<sup>er</sup> juillet 1942, le passage du Soleil au méridien au moment où son chronomètre réglé sur le temps moyen de Greenwich indique 11 h 10 m 5 s. Le Soleil passe au méridien de *B* à midi vrai (temps local de *B*). Le 1<sup>er</sup> juillet 1942, l'équation du temps à midi était  $E = + 3$  m 35 s. Le Soleil a donc passé au méridien de *B* à 12 h 3 m 35 s de temps moyen. La différence entre cette heure et celle du chronomètre est la longitude de *B*. Elle est donc : 12 h 3 m 35 s — 11 h 10 m 5 s = 53 m 30 s E. Le point *B* est à 53 m 30 s à l'est de Greenwich ou à  $13^\circ 22' 30''$  E.

En notant l'heure du passage d'une étoile donnée au méridien de *B*, on peut en déduire l'heure du passage du Soleil si l'on connaît les ascensions droites ( $\mathcal{R}$ ) de l'étoile et du Soleil au moment de l'observation; ces  $\mathcal{R}$  sont données dans les éphémérides. On obtient ainsi l'heure



Pl. I, fig. 14





solaire et on est ramené au cas où l'observation du passage concerne le Soleil.

Pour la sécurité de la navigation, il est très important que la longitude soit déterminée exactement ; c'est dire qu'il faut utiliser un excellent chronomètre qui indique l'heure de Greenwich avec la plus grande régularité possible. On emploie à cet effet des chronomètres de marine (pl. I, fig. 14) qui sont des instruments d'assez grand format, suspendus à la cardan dans un coffret, de sorte que les mouvements du navire ne modifient pour ainsi dire pas la position du chronomètre. Celui-ci est muni d'un dispositif (fusée) régularisant la force motrice, et possède une bonne compensation thermique grâce à laquelle la marche est à peu près indépendante de la température ; le réglage doit être fait très soigneusement.

Avant de se servir d'un chronomètre de marine, il faut contrôler et déterminer sa marche, vérifier la régularité de celle-ci ainsi que la compensation thermique ; ces contrôles sont faits dans certains observatoires astronomiques comme ceux de Neuchâtel, Besançon, Greenwich, Teddington, Hambourg, Washington, etc. Les résultats des mesures sont consignés dans un *bulletin de marche*.

En mer, le marin qui utilise un chronomètre de marine doit tenir compte de sa marche diurne, c'est-à-dire du nombre de secondes qu'il marque en plus ou en moins, 24 heures après avoir été remis exactement à l'heure. Le bulletin donne la marche diurne moyenne ; c'est un nombre de secondes affecté d'un signe conventionnel : + si le chronomètre avance, — s'il retarde.

Si la marche diurne moyenne est de  $+0,2$  s, il faudra retrancher chaque jour  $0,2$  seconde de l'heure indiquée par le chronomètre ; il faudra retrancher  $9 \cdot 0,2 = 1,8$  seconde si l'on observe le chronomètre 9 jours après qu'il a été mis à l'heure exacte.

Ce mode de faire n'est légitime que si la marche diurne varie chaque jour de  $+0,2$  s ; il n'est plus correct si la marche diurne n'est pas la même d'un jour à l'autre. Il est très important de connaître la variation de la marche diurne ; mais cette variation est généralement capricieuse, donc inconnue ; elle est heureusement petite et il nous suffit de savoir que sa valeur moyenne reste dans des limites raisonnables. Les bulletins de marche indiquent l'*écart moyen de la marche diurne*, c'est-à-dire la valeur moyenne des variations de la marche diurne comparée à la marche diurne moyenne. On calcule parfois la *variation moyenne de la marche diurne* qui est la moyenne des variations de la marche diurne.

Un exemple indiquera la manière de calculer ces différentes grandeurs. Pour observer un chronomètre, on le compare à une horloge de précision, l'horloge étalon que l'on considère comme exacte. Le

1<sup>er</sup> février, lorsque l'horloge indique 8 h 0 m 0 s, le chronomètre indique 8 h 0 m 0 s, 10. L'état du chronomètre est + 0,10 s. Le 2 février, à 8 h 0 m 0 s de l'horloge, le chronomètre marque 8 h 0 m 0 s, 13; son état est + 0,13 s. Du 1<sup>er</sup> au 2 février la *marche diurne* du chronomètre est  $(+ 0,13) - (+ 0,10) = + 0,03$  s. Si la marche diurne du 2 au 3 février est de  $- 0,05$  s, nous dirons qu'entre le 2<sup>e</sup> et le 1<sup>er</sup> jour, la *variation de la marche diurne* a été  $(- 0,05) - (+ 0,03) = - 0,08$  s.

On obtiendra, par exemple, le tableau suivant :

| Date  | Indication du chronomètre<br>à 8 h 0 m 0 s de l'horloge | Etat du<br>chronomètre | Marche<br>diurne | Variation<br>de la<br>marche<br>diurne | Ecart de la<br>marche<br>diurne et de<br>la marche<br>diurne<br>moyenne |
|---|---|------------------------|------------------|--|---|
| Février 1                                       | 8 h 0 m 0 s, 1  | + 0,1                  |                  |  |   |
| » 2   | 8 h 0 m 0 s, 2  | + 0,2                  | + 0,1            |  | + 0,14  |
| » 3   | 8 h 0 m 0 s, 7  | + 0,7                  | + 0,5            | + 0,4                                  | + 0,54  |
| » 4   | 8 h 0 m 0 s, 0  | + 0,0                  | - 0,7            | - 1,2                                  | - 0,66  |
| » 5   | 7 h 59 m 59 s, 0  | - 1,0                  | - 1,0            | - 0,3                                  | - 0,96  |
| » 6   | 7 h 59 m 59 s, 9  | - 0,1                  | + 0,9            | + 1,9                                  | + 0,94  |
| Marche diurne moyenne . . . . .                 |   |                        | - 0,04           |  |   |
| Variation moyenne de la marche diurne . . . . . |   |                        |                  | ± 0,95                                 |   |
| Ecart moyen de la marche diurne . . . . .       |   |                        |                  |  | ± 0,65  |

L'emploi du chronomètre ne conduit à des résultats satisfaisants que si l'écart moyen de la marche diurne est petit. Cet écart est donc un facteur important pour déterminer la valeur d'un chronomètre comme garde-temps.

Dans les avions ou dans les navires tels que les torpilleurs ou les sous-marins, on utilise des instruments plus petits, les chronomètres de bord (montres pour torpilleurs, « deck-watches »), qui sont soit suspendus à la cardan, soit insérés dans un tableau de bord.

Un bon chronomètre peut avoir de temps en temps une variation de marche imprévisible et pourtant assez importante pour provoquer une erreur intolérable dans la détermination de la longitude. On peut déceler un « saut » dans la marche d'un chronomètre en comparant cette marche

à celle d'un ou de plusieurs autres chronomètres. Aussi les navires emportent-ils souvent plusieurs chronomètres de marine.

Les progrès de la T. S. F. et l'émission régulière de signaux horaires permettent aujourd'hui un contrôle très sûr et très fréquent de la marche du chronomètre ; ainsi les chronomètres supplémentaires ont perdu une grande partie de leur utilité. Mais le chronomètre de marine reste indispensable pour avoir l'heure entre deux émissions de signaux horaires.

### **Inconvénients de la numération actuelle des angles et du temps. —**

Dans les calculs habituels autres que ceux qui concernent les angles et le temps, nous utilisons la numération décimale ; les nombres sont composés d'unités, croissantes ou décroissantes, à partir de celle que nous appelons l'*unité*, telles que le rapport entre une unité et celle qui la suit est 1 : 10 pour la série croissante et de 10 : 1 pour la série décroissante. Les unités croissantes à partir de l'unité sont les dizaines, les centaines, etc. ; les unités décroissantes, les dixièmes, les centièmes, etc.

Dans ces nombres, les différentes unités ne sont pas nommées ; nous les reconnaissons à la place qu'elles occupent. Dans un nombre entier, le premier chiffre à droite indique les unités, le suivant les dizaines, et ainsi de suite. Dans un nombre décimal, le premier chiffre avant la virgule indique les unités, puis en allant vers la gauche, nous avons les dizaines, les centaines, etc. ; le premier chiffre après la virgule indique les dixièmes, le second les centièmes, et ainsi de suite.

Pour exprimer les angles, nous avons conservé les unités degrés, minutes, secondes dont le rapport est 60 : 1 ; c'est la notation sexagésimale ; mais pour indiquer les unités de chaque espèce, nous avons recours à la division décimale.

Autrefois les tierces, qui sont 60 fois plus petites que les secondes, étaient encore employées. C'était dans la logique du système. Actuellement nous n'utilisons plus guère que les sous-multiples décimaux de la seconde. Au lieu d'écrire 27'' 36''', nous notons aujourd'hui 27'', 6.

Pour le temps, nous avons aussi un système mixte. Si nous n'envisageons que les heures, minutes et secondes, nous avons exactement le système utilisé pour les angles. Mais quand nous prenons des unités plus grandes, le jour par exemple, nous avons encore une autre numération puisque l'heure vaut  $\frac{1}{24}$  de jour.

Lorsqu'il s'agit d'effectuer des calculs au moyen de nombres exprimant des angles ou des durées, il faut constamment avoir recours aux rapports entre les unités, et ces rapports ne sont pas simples parce qu'ils ne sont pas ceux de la numération décimale au moyen de laquelle nous effectuons les opérations.

Si nous voulons multiplier par 3 la durée 11 h 24 m 37 s, nous multiplions les heures, les minutes et les secondes par 3, puis nous extrayons de chaque produit les unités supérieures. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} 11 \text{ h} \cdot 3 &= 33 \text{ h} = 1 \text{ j } 9 \text{ h} \\ 24 \text{ m} \cdot 3 &= 72 \text{ m} = 1 \text{ h } 12 \text{ m} \\ 37 \text{ s} \cdot 3 &= 111 \text{ s} = 1 \text{ m } 51 \text{ s}. \end{aligned}$$

En ajoutant ces trois résultats, nous obtenons 1 j 10 h 13 m 51 s. Si la durée avait été exprimée dans le système décimal, une seule multiplication par 3 eût été nécessaire.

**Notation décimale des angles.** — Dans le *système centésimal* on divise l'angle droit en 100 *grades* (gr), et le grade en fractions décimales ordinaires, de sorte que, si un angle est exprimé en grades, les décimales successives représentent des *décigrades* (dgr), des *centigrades* (cgr), des *milligrades* (mgr), etc. Le centigrade est aussi appelé la *minute centésimale* ('); il contient 100 *secondes centésimales* (") ou 100 *décimilligrades*,

L'angle 34 gr 27' 65", 5 peut s'écrire simplement 34, 276 55 gr. Avec de tels nombres, les calculs sont faciles et n'exigent pas de transformation d'unité. Ils se font comme ceux que nous exécutons chaque jour avec des nombres ordinaires.

Pour comparer les grades, minutes et secondes centésimales avec les degrés, minutes et secondes sexagésimales, on part des relations :

$$\begin{aligned} 100 \text{ gr} &= 90^\circ, & 1 \text{ gr} &= \frac{9^\circ}{10} = 54', \\ 100' &= 54', & 1' &= 32'', 4, \\ 100'' &= 32'', 4, & 1'' &= 0'', 324. \end{aligned}$$

Le passage d'un des deux systèmes à l'autre s'effectue soit à l'aide de tables de conversion, soit par un calcul direct qu'il est commode de faire de la façon suivante :

*Premier cas.*

|  |                  |
|--|------------------|
| Soit à convertir en °, ' et '' l'angle . . . . .                   | 47,432 gr        |
| Convertir les gr en ° en retranchant le $\frac{1}{10}$ : . . . . . | 4, 743 2         |
|  | <hr/> 42°, 688 8 |
| Convertir les fractions de ° en ' en multipliant par 60 . .        | 42° 41', 328     |
| Convertir les fractions de ' en '' en multipliant par 60 . .       | 42° 41' 19'', 68 |

*Second cas.*

Soit à convertir en gr et fraction de gr l'angle . . . .  $42^{\circ} 41' 19'', 68$   
 Convertir les '' en fractions décimales de ' en divisant par 60 :  $42^{\circ} 41', 328$   
 Convertir les ' en fractions décimales de ° en divisant par 60 :  $42^{\circ}, 688\ 8$   
 Convertir les ° en gr en multipliant par  $\frac{10}{9}$  . . . .  $47,432\text{ gr}$

La division centésimale est d'un usage de plus en plus courant chez les géomètres, topographes, géodésiens, etc., tandis que la division sexagésimale continue d'être employée par les astronomes, marins, etc.

**Notation décimale du temps.** — Si la numération décimale était appliquée aux angles, il ne resterait plus que la notation du temps à adapter au système décimal. Pour les pays comme ceux de l'Europe occidentale et centrale qui ont adopté le système métrique, toutes les mesures seraient exprimées dans le même système qui est en même temps celui d'après lequel nous écrivons les nombres. Vers la fin du XIX<sup>e</sup> siècle, J. de Rey-Pailhade a proposé, pour le temps, la division suivante : l'unité serait la centième partie du jour, le *cé*. D'où les multiples *décacé*, *hectocé*, *kilocé* et les sous-multiples *décicé*, *centicé*, *millicé*. Il n'y aurait guère, comme multiple, que le *décacé*, puisque l'*hectocé* est le jour. On aurait ainsi :

$$\text{le cé} = \frac{24}{100} \text{ h} = 14,4 \text{ m} = 14 \text{ m } 24 \text{ s},$$

$$\text{le centicé} = 8,64 \text{ s},$$

$$\text{le millicé} = 0,864 \text{ s}.$$

Pour désigner un instant quelconque, on dirait par exemple : 1947 mars 6, 4257, au lieu de 1947 mars 6, à 10 h 13 m 0 s, 48.

La transformation du temps en angles, c'est-à-dire des cés en grades, serait simple puisque :

$$24 \text{ h} = 360^{\circ} = 400 \text{ gr};$$

on aurait :

$$100 \text{ cés} = 400 \text{ gr},$$

$$1 \text{ cé} = 4 \text{ gr},$$

$$1 \text{ centicé} = 4 \text{ centigrades},$$

$$1 \text{ millicé} = 4 \text{ milligrades}.$$

On pourrait désirer une relation plus simple telle que le facteur 4 devienne égal à 1. Cela reviendrait à diviser le jour non en 100, mais en 400 parties.

La transformation du temps en angles ne présenterait alors aucune difficulté puisque les deux grandeurs seraient toujours exprimées par le même nombre. Mais il y aurait, pour désigner l'instant du jour, un peu plus de difficultés que dans le système de J. de Rey-Pailhade.

**Applications de la notation décimale des angles et du temps.** — La notation des angles en grades a fait l'objet de plusieurs essais ; il existe déjà des tables de logarithmes dans lesquelles les angles sont exprimés à la fois en degrés et en grades. La nouvelle notation intéresse particulièrement les astronomes et les marins. Son application exige des instruments de mesure d'angles (rapporteurs, sextants, théodolites, lunettes astronomiques, etc.) divisés en grades et centigrades, et en même temps des tables (éphémérides, formulaires, tables de logarithmes, etc.) calculées d'après le nouveau système. Ces transformations n'offrent pas de difficultés insurmontables ; elles demandent de la peine et du temps pour le calcul des tables, de l'argent pour l'adaptation des instruments.

La marine française a essayé la nouvelle notation ; les résultats furent encourageants ; la difficulté de passer d'un système à l'autre n'est pas grande et le gain de temps dans les calculs est appréciable.

L'application de la notation décimale au temps n'a pas fait beaucoup de progrès jusqu'à présent. Elle serait grosse de conséquences puisqu'il faudrait transformer les montres et les horloges qui sont légion.

**Le calendrier.** — Pour exprimer de longues durées, les unités de temps (jours, heures, minutes et secondes) dont nous avons parlé sont trop petites ; les durées seraient exprimées par des nombres trop grands et peu maniables.

La série de ces unités a été complétée en y ajoutant des unités plus grandes, la semaine, le mois, l'année, le siècle. Ces unités ont ou n'ont pas une relation fixe avec le jour : si la semaine a toujours 7 jours, le mois en a de 28 à 31. Le mois ne peut pas être utilisé pour des désignations précises.

Quant à l'année, celle que nous utilisons, c'est-à-dire l'*année tropique*, c'est la durée que met le Soleil pour parcourir l'écliptique dans son mouvement apparent. C'est donc le temps qui s'écoule entre deux passages consécutifs du Soleil au point vernal.

L'année tropique contient 365,242 20 jours moyens. Ce nombre peut se mettre sous la forme suivante :

$$(A) \qquad 365 + \frac{1}{4} - \frac{3}{400} - \frac{3}{10\,000},$$

où les trois fractions qui suivent 365 apparaissent comme trois corrections successives de plus en plus faibles.

Si l'*année civile* doit compter un nombre entier de jours, elle est ou plus courte ou plus longue que l'année tropique. De là naissent toutes les difficultés du calendrier, car nous devons respecter le plus possible l'année tropique qui détermine les saisons.

Supposons que, cette année, le commencement du printemps soit le 21 mars, et admettons une année de 365 jours. Chaque année, l'équinoxe du printemps sera retardé — dans le calendrier — de  $\frac{1}{4}$  de jour environ.

Dans 4 ans, il aura lieu le 22 mars, et dans 40 ans le 31 mars.

Aussi, pour que l'année comprenne un nombre entier de jours tel que les saisons ne se déplacent jamais d'une quantité notable, il a fallu lui donner un nombre variable de jours : 365 et 366 jours.

Nous ne décrirons pas les calendriers anciens ni ceux qui sont encore utilisés par les Juifs, les Musulmans, les Chinois, etc. Nous expliquerons le calendrier que nous utilisons aujourd'hui et celui dont il est issu.

**Le calendrier julien.** — Les calendriers successifs utilisés par les Romains avant Jules César étaient très imparfaits. C'est en l'an 708 de la fondation de Rome, soit en l'an 46 avant J.-C. (année qui fut de 445 jours et qui prit le nom d'année de confusion) qu'a été institué le *calendrier julien*, suivant lequel la longueur moyenne de l'année est de  $365\frac{1}{4}$  jours. Ce résultat est atteint en faisant suivre trois *années communes* de 365 jours par une *année bissextile* de 366 jours. Les années dont le millésime est divisible par 4 sont bissextiles.

L'année julienne est divisée en 12 mois qui ont chacun le nombre de jours que nous connaissons. Le jour *complémentaire* ou *intercalaire* est ajouté au mois de février, qui compte alors 29 jours au lieu de 28.

Le calendrier julien resta en vigueur dans toute l'Europe jusque'en 1582.

L'année julienne ne tenant compte que du premier terme correctif de la suite (A), elle est trop longue, et le décalage entre le calendrier julien et le mouvement du Soleil augmente de 3 jours tous les 400 ans. Cela fait un écart de 11 minutes environ par année ; la différence n'est pas grande, mais l'erreur s'accumule avec les années et au XVI<sup>e</sup> siècle le commencement du printemps avait rétrogradé de 10 jours.

**Le calendrier grégorien.** — En 1582, à Rome, le pape Grégoire XIII ordonna de rattraper ce retard : le jeudi 4 octobre 1582 fut suivi du vendredi 15 octobre 1582. Pour que le décalage ne se reproduise plus à l'avenir, il fallait modifier le calendrier julien : 3 années séculaires sur 4

étaient rendues communes; seules les années 1600, 2000, 2400,..., dont le millésime est un multiple de 400, restaient bissextiles, tandis que les autres années séculaires 1700, 1800, 1900, 2100, ... redevenaient communes.

Il résulte de la définition de l'année grégorienne que sa longueur moyenne est de :

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{3}{400} = 365,2425 \text{ jours.}$$

Pour se trouver plus rigoureusement d'accord avec l'année tropique, il resterait à tenir compte de la troisième correction de la suite (A), en supprimant 3 jours après 10 000 ans, soit, en moyenne, 1 jour après 3333 ans.

Dans les premières années qui suivirent l'adoption du calendrier grégorien, on se servit encore souvent du calendrier julien, de sorte qu'il fallait spécifier de quel calendrier il s'agissait. Au lieu du calendrier julien on disait « vieux style »; le calendrier grégorien était désigné par « nouveau style ». Ainsi le 5 octobre 1582 (vieux style) et le 15 octobre 1582 (nouveau style) désignent le même jour.

La date grégorienne d'un jour quelconque surpasse la date julienne du même jour d'un certain nombre qui augmente d'une unité chaque fois que survient une année séculaire commune. Ce nombre était :

en 1582 : 10,  
 en 1601 : 10, parce que 1600 était une année bissextile,  
 en 1701 : 11, parce que 1700 était une année commune,  
 en 1801 : 12,  
 en 1901 : 13.

Ce nombre est actuellement égal à 13 et le restera jusqu'au 1<sup>er</sup> mars 2100 (nouveau style); il sera égal à 14 jusqu'au 1<sup>er</sup> mars 2200.

Le calendrier grégorien fut introduit en 1582 en Italie et en France, en 1752 en Angleterre. Dès ces années, les dates sont indiquées dans ces pays d'après le nouveau style, à moins de spécification contraire.

**La réforme du calendrier.** — On reproche au calendrier grégorien de ne pas être le même d'une année à l'autre. Ainsi le 1<sup>er</sup> mars était en 1947 un samedi, en 1948 un lundi, en 1949 un mardi, etc.

On déplore aussi la grande différence entre les mois dont la durée va de 28 à 31 jours.

Les trimestres ont aussi des longueurs différentes : 90, 91, 92, 92 jours, ou 91, 91, 92, 92 jours dans les années bissextiles.



Les projets de nouveaux calendriers ne manquent pas. La plupart conservent les 12 mois dont ils modifient les nombres de jours ; ils ne comptent que 364 jours = 52 semaines ; le 365<sup>e</sup> jour serait un jour sans date désigné par un nom (Nouvel-An par exemple) ou par une lettre. Le 366<sup>e</sup> jour des années bissextiles serait traité comme le 365<sup>e</sup>.

Certains réformateurs plus audacieux proposent une année de 13 mois à 28 jours = 4 semaines, ou demandent le déplacement du commencement de l'année, qui serait reporté du 1<sup>er</sup> janvier au 21 mars (équinoxe de printemps) ou au 23 septembre (équinoxe d'automne) comme dans le calendrier républicain.

Le projet qui semble réunir le plus de suffrages est le suivant :

1<sup>o</sup> la disposition des années communes et des années bissextiles serait la même que dans le calendrier grégorien ;

2<sup>o</sup> chaque trimestre aurait un mois de 31 jours et deux mois de 30 jours ; il aurait 91 jours ou exactement 13 semaines ;

3<sup>o</sup> le premier jour de chaque trimestre serait un dimanche, le dernier jour un samedi ;

4<sup>o</sup> le jour supplémentaire des années communes serait placé entre le 30 décembre et le 1<sup>er</sup> janvier : il s'appellerait Nouvel-An ; le deuxième jour supplémentaire des années bissextiles serait placé entre le 30 juin et le 1<sup>er</sup> juillet ;

5<sup>o</sup> l'année commencerait toujours par un dimanche (1<sup>er</sup> janvier) et l'on aurait un calendrier perpétuel.

Peut-être profiterait-on de cette réforme pour fixer la fête de Pâques. Si on la fixait au deuxième dimanche d'avril par exemple, c'est-à-dire au 8 avril, on aurait l'Ascension le jeudi 16 mai et Pentecôte le dimanche 26 mai. L'Assomption serait le mercredi 15 août, la Toussaint le mercredi 1<sup>er</sup> novembre et Noël le lundi 25 décembre.



## CHAPITRE III

# FONCTIONS GÉNÉRALES DES PENDULES ET DES MONTRES

**Les moyens de mesurer le temps.** — Pour mesurer une durée, il faut la comparer à celle d'un phénomène quelconque qui se répète dans les mêmes conditions.

Le mouvement peut être un de ces phénomènes; il est facile par exemple de concevoir une roue animée d'un mouvement uniforme de rotation et actionnant, au moyen de roues dentées, les aiguilles d'une horloge. Il en est ainsi dans certaines horloges électriques, telles que les horloges à quartz.

En réalité, dans les appareils horaires courants, comme les montres et les pendules, on fait appel à un autre phénomène périodique que le mouvement uniforme de rotation : le mouvement pendulaire.

**Phénomènes périodiques.** — Un phénomène est *périodique* quand il se répète à intervalles de temps égaux avec toutes les mêmes particularités. La *période* d'un tel phénomène est l'intervalle de temps constant qui sépare deux phases identiques du phénomène.

Nous désignons la période par  $T$ ; elle est exprimée en unités de temps, pour nous en secondes.

La *fréquence*  $f$  est le nombre de périodes par unité de temps, c'est-à-dire par seconde. La fréquence et la période sont liées entre elles par la relation :

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{ou} \quad fT = 1.$$

Une longue période correspond à une faible fréquence et inversement.

Dans les appareils horaires, le phénomène périodique joue un rôle extrêmement important puisqu'il définit la période  $T$ , c'est-à-dire l'unité à laquelle on compare les durées à mesurer.

*Les phénomènes périodiques caractérisés par la constance de la période sont propres à être utilisés dans les instruments de mesure du temps.*

Ces phénomènes ne sont pas rares ; les petites oscillations d'un pendule ou d'une aiguille aimantée libre sur un pivot, celles d'un balancier accouplé à un spiral, celles d'un diapason, de cordes vibrantes, d'un fil tordu qui se détord, en sont quelques exemples.

**Les oscillations du pendule.** — Un pendule est composé d'une masse pesante attachée à l'extrémité d'une tige mobile autour de son autre extrémité.

Si le poids de la tige est nul et si la masse pesante est concentrée en un point, nous avons un *pendule simple* ou *pendule mathématique*. C'est dire que le pendule simple n'existe qu'à l'état de concept, mais un pendule réalisé par une masse très petite et très dense suspendue à un fil de cocon par exemple peut être considéré, sans erreur grossière, comme un pendule simple.

Les autres pendules sont des *pendules physiques* ou *pendules composés*.

Le pendule d'une horloge oscille autour d'un axe horizontal et occupe successivement, par rapport à la *position de repos*  $OA$  (fig. 15), des positions symétriques  $OA'$  et  $OA''$  qui sont les *positions extrêmes*. Il a accompli une *oscillation* lorsque, étant parti de la position extrême  $OA'$  par exemple, il est revenu en  $OA'$  après avoir occupé les positions  $OA$ ,  $OA''$ ,  $OA$ . Le temps, exprimé en secondes, nécessaire pour accomplir une oscillation est la *durée d'oscillation* ou la *période*.

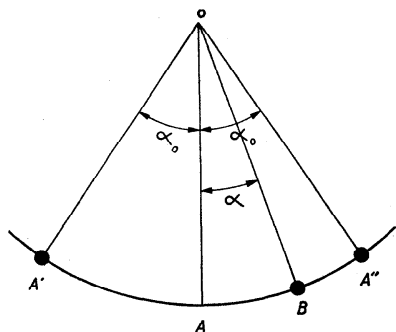


Fig. 15

Les horlogers sont amenés à considérer les demi-oscillations, c'est-à-dire le déplacement du pendule de  $OA'$  à  $OA''$ ; ils les appellent *alternances*.

Une position quelconque  $OB$  du pendule est caractérisée par l'angle  $\alpha = \angle AOB$  qui est l'*élongation*. L'élongation maximum  $\alpha_0$  est l'*amplitude*. L'angle  $A'OA''$  est le double de l'amplitude et s'appelle le *cheminement*.

Les mêmes définitions sont valables pour le mouvement du balancier d'une montre, ramené à sa position de repos par le spiral.

On confond parfois les notions : oscillation et alternance ou bien amplitude et cheminement. Quand un horloger dit que le balancier de sa montre a une amplitude de 1,5 tour, c'est du cheminement qu'il veut parler.

**Les fonctions diverses d'un mouvement de pendule.** — Sous l'influence de la pesanteur, le pendule  $OA'$  (fig. 15), écarté de sa position d'équilibre  $OA$  puis abandonné à lui-même, décrit l'angle  $A'OA$  avec une vitesse croissante, puis l'angle symétrique  $AOA''$  avec une vitesse décroissante. Si le mouvement était parfaitement libre, l'angle  $AOA''$  serait égal à l'angle  $A'OA$  ; mais il est contrarié par la résistance de l'air et par celle de la suspension, de sorte que (fig. 16) :

$$\sphericalangle AOA'' < \sphericalangle A'OA.$$

Le mouvement du pendule est amorti.

Il est intéressant de considérer l'énergie potentielle du pendule dans les positions extrêmes  $OA'$  et  $OA''$ . Dans la position  $OA'$ , la pesanteur peut amener le pendule en  $OA$ . Si  $m$  est la masse du pendule,  $mg$  son poids,  $h = CA$  la distance verticale qu'il peut parcourir, l'énergie potentielle dans la position  $OA'$  a pour valeur  $mgh$ . Mais à cause des résistances, le pendule atteint une position  $OA''$  telle que  $A''$  est moins haut que  $A'$ . Appelons  $h'$  la distance verticale  $DA$ . Dans la position  $OA''$  l'énergie potentielle a pour valeur  $mgh'$ . Puisque  $h' < h$ , le pendule en passant de  $OA'$  en  $OA''$  a perdu une partie  $mg(h - h')$  de son énergie potentielle.

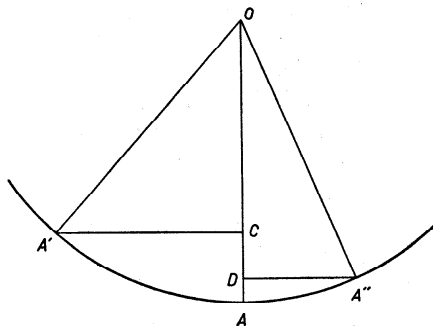


Fig. 16

Il en perdra une nouvelle partie en retournant de  $OA''$  vers  $OA'$ .

L'amplitude des oscillations va décroître de plus en plus et, au bout d'un temps relativement court, le pendule s'arrêtera. Il va sans dire que cela ne doit pas arriver dans une horloge. Il est donc nécessaire de donner de temps en temps des impulsions pour entretenir le mouvement du pendule ; en d'autres termes, il faut lui rendre l'énergie absorbée par les résistances.

Un mécanisme, l'échappement, est chargé de cette fonction. Il donne des impulsions à intervalles réguliers ou non, soit directement au pendule (ou au balancier dans les montres), soit en agissant sur le ressort de suspension du pendule (ou sur le spiral du balancier) ; l'impulsion peut être une attraction magnétique, c'est-à-dire sans contact matériel entre l'échappement et le pendule.

Pour actionner l'échappement, il faut une *source d'énergie* que l'on désigne sous le nom de *force motrice*. Dans les horloges à pendule, cette force résulte de l'action d'un poids.

Le travail que peut fournir le poids, c'est-à-dire son énergie, dépend du poids et de la hauteur dont il peut descendre.

L'énergie motrice est considérable si on la compare à celle qui est nécessaire pour maintenir constante l'amplitude de quelques oscillations du pendule. Mais il s'agit d'entretenir les oscillations pendant 1, 2, 8 jours, voire 1 mois et même davantage ; il faut donc utiliser l'énergie motrice pour ainsi dire goutte à goutte. On y parvient en intercalant entre la source d'énergie et l'échappement une série de roues et de pignons, le *rouage* qui provoque une augmentation de la vitesse et une diminution de la force ; ainsi on permet à l'échappement de donner des impulsions petites et fréquentes.

Le pendule qui est l'organe régulateur du mouvement, l'échappement qui entretient les oscillations, et la force motrice qui, par l'intermédiaire du rouage, actionne l'échappement, constituent un ensemble capable de fonctionner aussi longtemps que l'énergie motrice n'est pas épuisée.

Mais il ne suffit pas d'avoir un pendule oscillant longtemps avec la plus grande régularité ; pour mesurer une durée, il faut savoir combien d'oscillations (ou d'alternances) le pendule a exécutées pendant cette durée. Il serait fastidieux de compter les oscillations ; on confie cette opération au mécanisme de l'horloge et le résultat est indiqué par des aiguilles marquant les heures, les minutes et les secondes sur un cadran. La durée d'un phénomène est la différence entre les valeurs en heures, minutes et secondes marquées à la fin et au commencement ; c'est la différence entre les *états* de la pendule à la fin et au début du phénomène. L'état étant donné par la position des aiguilles, c'est une valeur qui se modifie sans cesse.

Il faut obtenir des vitesses convenables pour les aiguilles ; celle des heures doit faire un tour en 12 heures, celle des minutes un tour en une heure, et celle des secondes un tour en une minute. On obtient les vitesses convenables des aiguilles des minutes et des secondes en choisissant judicieusement les nombres des dents des roues et des pignons du rouage. Pour faire tourner l'aiguille des heures à la vitesse désirée, il faut un petit rouage supplémentaire appelé *minuterie*.

Si on fait abstraction de la minuterie, le rouage a deux fonctions bien distinctes à remplir ; il doit *transmettre l'énergie à l'échappement* et en même temps *compter les oscillations du pendule*.

On a maintenant un appareil horaire capable d'indiquer l'heure. Mais au bout d'un certain temps, lorsque l'énergie motrice sera épuisée, il s'arrêtera. Il faut pouvoir restaurer l'énergie motrice, d'où la nécessité d'un *mécanisme de remontage* qui permet de remonter le poids.

Quand l'horloge s'est arrêtée, il faut remettre les aiguilles dans la

position qu'elles occuperaient si l'arrêt n'avait pas eu lieu, d'où la nécessité d'un *dispositif de mise à l'heure* qui permet de déplacer les aiguilles sans entraver le mouvement du pendule.

Le mouvement est ainsi complet; c'est un mécanisme délicat qu'il convient de protéger contre la poussière, l'humidité et les chocs; cette protection est réalisée par le cabinet de l'horloge.

Ce que nous avons succinctement décrit, c'est le mécanisme d'une pendule qui donne simplement l'heure. Parfois le mouvement est encore chargé d'autres fonctions : sonnerie des heures et des quarts, indication de certains phénomènes astronomiques (lever et coucher du Soleil, phases de la Lune) ou du temps mesuré en d'autres unités que celles du temps solaire moyen (temps sidéral, temps solaire vrai). Chaque fonction nouvelle exige un dispositif spécial qui s'ajoute au mécanisme que nous avons décrit.

Nous allons expliquer, avec un peu plus de détails, les principes sur lesquels doit reposer la construction des différents organes constituant le mécanisme des pendules.

**L'organe régulateur des pendules.** — L'organe régulateur des horloges à pendule est le pendule : masse pesante attachée à une tige mobile autour de l'une de ses extrémités.

On conçoit l'importance de cet organe dont les balancements découpent le temps en parties qui devraient être rigoureusement égales. On ne voit pas de raison pour que la période d'un pendule se modifie si le mouvement conserve la même amplitude et a lieu dans les mêmes conditions de température, de pression, d'humidité de l'air, etc.

En réalité, les facteurs qui viennent d'être énumérés ne sont pas immuables et ils peuvent modifier, entre autres, l'amplitude des oscillations. Or, toute modification de l'amplitude d'un pendule se traduit par une modification de la période.

En effet, la période d'un pendule dépend de sa longueur, de la répartition de la masse du pendule par rapport à l'axe de rotation et de l'amplitude.

Pour atténuer l'influence de l'amplitude, on diminue celle-ci autant que possible : dans les pendules astronomiques, elle reste inférieure à 1°. Mais on ne doit pas oublier que *les oscillations du pendule ne sont jamais isochrones*<sup>1</sup>, c'est-à-dire indépendantes de l'amplitude. Si le défaut d'isochronisme est réduit lorsque l'amplitude est petite, il existe cependant et ne peut pas être négligé pour des pendules de précision dont la

<sup>1</sup> Etymologiquement, les oscillations sont isochrones quand elles ont la même durée quelles que soient l'amplitude, la température, la pression, etc. Les horlogers donnent au mot « isochrone » le sens restreint d'indépendant de l'amplitude.

variation de la marche diurne ne dépasse pas quelques centièmes de seconde. Une variation de la marche diurne d'une pendule à secondes de 0,03 s correspond à une variation de la période de  $\frac{0,03}{43\,200} = 7 \cdot 10^{-7}$  s.

On comprend l'importance qu'il y a à *conserver aux oscillations du pendule une amplitude constante*.

Pour cela, il faut résoudre deux problèmes : *diminuer et régulariser l'amortissement des oscillations du pendule libre ; régulariser l'intensité des impulsions d'entretien*.

L'amortissement du mouvement pendulaire est dû à la résistance de l'air et à celle qui provient de la suspension du pendule.

On pourrait éliminer la résistance de l'air en mettant la pendule sous une cloche vide d'air. Il est assez malaisé de maintenir le vide ; on préfère placer l'horloge sous une cloche étanche contenant une certaine quantité d'air qui échappe ainsi aux variations de la pression et de l'humidité de l'air extérieur. Mais l'air enfermé n'est pas à l'abri des variations de la température, aussi place-t-on les horloges de haute précision, comme les horloges astronomiques, dans des locaux à température constante (caves profondes ou locaux dont la température est régularisée par un thermostat).

Il y a lieu de noter aussi que la résistance de l'air augmente avec la vitesse du pendule, c'est-à-dire avec l'amplitude.

Le problème de la suspension consiste à trouver le moyen le plus rationnel de fournir au pendule un axe de rotation ; il s'agit de trouver la manière qui laisse au pendule la plus grande liberté et absorbe le moins d'énergie possible.

A cause du frottement considérable, il est exclu de rendre le pendule solidaire d'un axe qui tourne dans des coussinets. Huygens (1629-1695) suspendait le pendule à un fil souple ; cette solution n'est plus guère utilisée aujourd'hui que dans les horloges de qualité médiocre ; le fil, bien que n'offrant pas une grande résistance à la flexion, peut s'allonger ou se raccourcir sous l'influence du poids du pendule ou de l'humidité de l'air ; pour qu'il reste souple, il doit être fin et alors il ne peut plus supporter un pendule lourd tel que celui d'une horloge de précision.

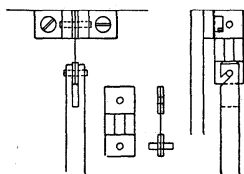


Fig. 17

La *suspension à ressort* (fig. 17) est la plus employée ; elle est constituée par une ou deux lames d'acier ou d'un alliage élastique, serrées dans une pièce à laquelle est suspendu le pendule et dans une pièce fixe. Dès que le pendule s'écarte de sa position de repos, les lames sont pliées. Cette flexion absorbe une certaine



quantité d'énergie qui est restituée en grande partie dès que le pendule retourne vers sa position d'équilibre.

On conçoit facilement que *l'énergie absorbée par la suspension augmente avec l'amplitude*.

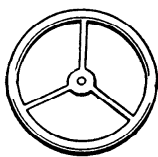


Fig. 18

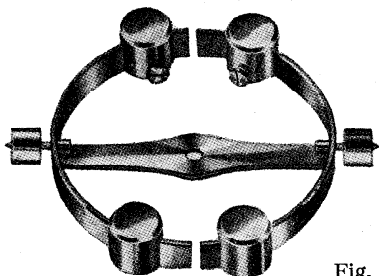
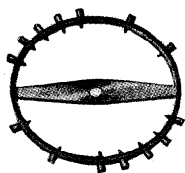


Fig. 19

**L'organe régulateur des montres.** — Dans les montres destinées à être portées et à subir de nombreux changements de position, il ne peut être question d'utiliser un pendule. L'organe régulateur est constitué par un balancier accouplé à un spiral.

Le *balancier* est un anneau circulaire, la serge, muni de deux ou trois bras ; la serge porte souvent des vis. *Le centre du balancier est aussi son centre de gravité*.

Le balancier est *monométallique* (fig. 18), si la serge et les bras sont de même métal ; il est *bimétallique* (fig. 19), quand la serge est formée de deux anneaux de métaux inégalement dilatables soudés l'un à l'autre. Le balancier bimétallique est *compensateur* lorsque la serge est coupée, c'est-à-dire qu'il a la faculté de corriger les écarts de marche dus à l'influence des variations de température sur le spiral et sur le balancier.

Le *spiral* est un ressort en acier ou en un autre alliage (bronze, élinvar, nivarox, mételinvar, isoval, etc.) enroulé en forme de spirale d'Archimède (spiral plat) (fig. 20) ou en forme d'hélice (spiral hélicoïdal appelé souvent spiral cylindrique) (fig. 21).

Le spiral est attaché, par une de ses extrémités à l'arbre du balancier, par l'autre à une pièce fixe de la montre, généralement le coq. Dès que le balancier est mû autour de son axe, le spiral est déformé : il tend, grâce à son élasticité, à reprendre sa forme primitive et à ramener le balancier dans sa position de repos.

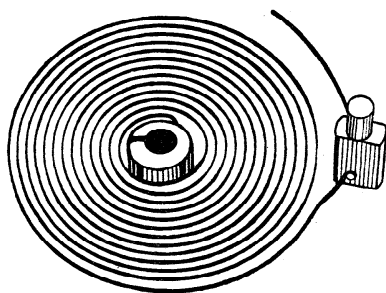


Fig. 20

*La force élastique du spiral joue envers le balancier le même rôle que la pesanteur envers le pendule.*

Le spiral « armé » ramène le balancier à sa position de repos en lui imprimant une vitesse croissante ; le balancier ne peut pas s'arrêter brusquement ; il continue son mouvement au delà de la position de repos et déforme ainsi de nouveau le spiral dont la force élastique s'oppose de plus en plus au mouvement qu'elle finit par arrêter.

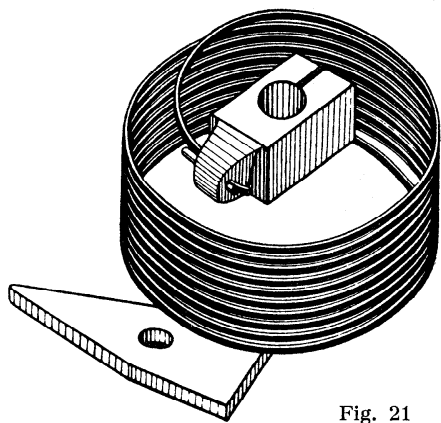


Fig. 21

Pour mieux situer la position du balancier, représentons-le avec un seul bras (fig. 22). En nous rappelant ce que nous avons dit du pendule, nous voyons que :

$OA$  est la *position de repos* ou d'*équilibre* ;

$OB$  et  $OC$ , les *positions extrêmes* ;

$OD$ , une *position intermédiaire* quelconque ;

$\sphericalangle COA = \sphericalangle AOB = \alpha_0$ , l'*amplitude* ;

$\sphericalangle AOD = \alpha$ , l'*élongation* correspondante à la position  $OD$ .

Lorsque le balancier passe de la position  $OB$  à  $OA$  puis à  $OC$  et revient à la position  $OB$ , il a accompli une *oscillation* ; le temps qu'il a employé est la *période* ou *durée d'oscillation*. La moitié d'une oscillation, c'est-à-dire le parcours de  $OB$  à  $OC$ , est une *alternance*.

Considérons, dans un mouvement de montre, un balancier avec son spiral, son arbre, le coq, le tout mis en place ; nous dirons que le balancier est libre parce qu'il n'est pas en contact avec l'échappement. Si nous lâchons le balancier en  $OB$ , il atteindra une position  $OC'$  telle que :

$$\sphericalangle AOC' < \sphericalangle BOA .$$

Le mouvement est amorti ; l'amortissement est mesuré par l'angle  $C'OC$ . Au bout d'un certain temps, le balancier s'arrêtera ; il faut, comme pour le pendule, entretenir son mouvement par des impulsions fréquentes.

Les oscillations du balancier libre sont isochrones, c'est-à-dire qu'elles ont une durée indépendante de l'amplitude, lorsque certaines conditions sont remplies. Mais ces conditions ne sont jamais tout à fait remplies. Aussi

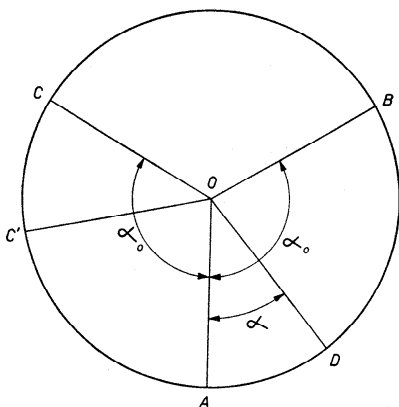


Fig. 22

la préoccupation constante des horlogers est-elle de réaliser des oscillations d'amplitude aussi constante que possible, donc de diminuer l'amortissement et de régulariser l'intensité des impulsions d'entretien. Mais ici le problème est beaucoup plus difficile à résoudre que dans le cas du pendule parce qu'on a affaire à une force motrice — celle d'un ressort — essentiellement variable.

**L'échappement.** — La fonction de l'*échappement* consiste à rendre au pendule ou au balancier l'énergie absorbée par les résistances passives, résistance de l'air, de la suspension, frottements, etc.

L'impulsion donnée par l'échappement modifie le mouvement du pendule ou du balancier libres ; elle ne va pas sans altérer la période, c'est-à-dire l'unité de temps utilisée pour la mesure des durées. Le meilleur échappement est celui qui altère le moins la durée d'oscillation.

On verra plus tard que, pour être le moins néfaste possible, l'impulsion doit être très courte et avoir lieu lorsque le pendule ou le balancier ont leur plus grande vitesse, c'est-à-dire sont près de leur position de repos.

Dans certaines constructions, une pièce de l'échappement reste toujours en contact avec une pièce solidaire du pendule ou du balancier. Dans d'autres, ce contact ne dure que pendant deux périodes très courtes : celle du *dégagement* pendant lequel l'organe régulateur libère l'échappement et lui permet de fonctionner, et celle de l'*impulsion*. Ces dernières constructions, qui laissent une très grande liberté à l'organe oscillant, sont les meilleures au point de vue de la précision dans la mesure du temps.

L'énergie restituée doit être égale à l'énergie dissipée ; or, celle-ci augmente avec l'amplitude ; il faut donc des impulsions d'autant plus énergiques que l'amplitude à maintenir est grande.

En général, on cherche à conserver de petites amplitudes pour le pendule afin de réduire les défauts de l'isochronisme. De faibles impulsions permettent de réduire la force motrice ou de la faire durer plus longtemps, ce qui est avantageux pour la conservation des organes de l'horloge.

Malgré les avantages des faibles impulsions, ce sont des oscillations de grande amplitude que l'on fait exécuter aux balanciers des montres. C'est que celles-ci sont soumises à de nombreux chocs et changements de position qui altèrent d'autant plus le mouvement du balancier que celui-ci a une vitesse plus réduite.

En somme, on s'efforce de réaliser les conditions les plus favorables à la *constance de la période de l'organe régulateur malgré les perturbations apportées par l'échappement*. Si, à un moment donné, l'impulsion de l'échappement augmente ou diminue d'intensité, il en résulte une augmentation

ou une diminution de l'amplitude de régime de l'organe oscillant et nous savons que cela n'est pas favorable à la constance de la période.

**Le rouage.** — La force motrice dont nous parlerons plus loin n'agit pas directement sur le pendule ou sur le balancier ; l'énergie contenue dans le poids ou dans le ressort de barillet doit être assez considérable pour permettre à la pendule ou à la montre de marcher longtemps sans être remontée, mais être distribuée en petites quantités à l'organe régulateur. C'est un des rôles du rouage de la transmettre de façon aussi régulière que possible tout en modifiant les deux facteurs dont elle est composée ; la force est réduite et le chemin parcouru est augmenté, ce qui est conforme au principe des travaux virtuels ou à la règle de Galilée : « Ce que l'on perd en force, on le gagne en temps ou en vitesse. »

Le rouage est composé d'un certain nombre de roues et de pignons dentés, une roue et un pignon étant fixés sur le même arbre. Dans une

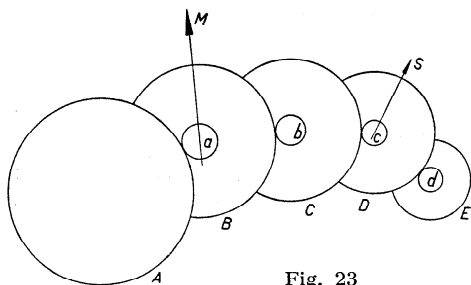


Fig. 23

montre par exemple, il se compose des roues *A, B, C, D* et des pignons *a, b, c, d* (fig. 23). Les roues portent les noms suivants : *A* est le *barillet* ; *B*, la *roue de centre* ou *roue des minutes* ; *C*, la *roue moyenne* et *D*, la *roue des secondes*. Les pignons portent les mêmes noms que les roues dont ils sont solidaires :

*a* est le *pignon de centre* ou *des minutes* ; *b*, le *pignon de moyenne* ; *c*, le *pignon des secondes*, et *d*, le *pignon d'échappement*, fixé sur le même arbre que la *roue d'échappement E*. La roue de centre *B* porte l'aiguille des minutes *M* ; elle doit donc faire un tour en une heure ; la roue des secondes *D* porte l'aiguille des secondes *S* et exécute une révolution en une minute. Le barillet *A* engrène dans le pignon *a* ; la roue *B* dans le pignon *b* ; *C* dans *c* et *D* dans *d*.

Puisque certaines roues portent des aiguilles, il faut que leur vitesse soit déterminée. On peut modifier les vitesses en changeant les nombres de dents des roues et des pignons. C'est donc en choisissant convenablement les nombres de dents qu'on parvient à faire tourner les aiguilles de façon qu'elles indiquent l'heure, la minute et la seconde en un instant quelconque.

La condition la plus importante à réaliser dans les appareils horaires est — nous l'avons dit — la constance de la période de l'organe régulateur. Pour arriver à cette constance, on cherche à obtenir toujours la même amplitude des oscillations, ce qui implique des impulsions ayant

toujours la même intensité. L'énergie provenant soit du poids, soit du ressort moteur doit être transmise de roue à pignon d'une façon aussi régulière que possible. On s'efforce d'obtenir cette régularité en donnant aux dents des roues et des pignons des profils soigneusement étudiés et exécutés.

L'étude du rouage comprend deux parties : le calcul des nombres de dents des roues et des pignons propres à engendrer les vitesses convenant aux aiguilles, la détermination des formes des dents assurant une transmission régulière de l'énergie.

**La force motrice.** — La constance de l'amplitude du régulateur ne peut être obtenue que par des impulsions conservant la même intensité ; il faut une force motrice restant toujours la même entre deux remontages, un rouage et un échappement transmettant cette force en modifiant son intensité, mais sans en altérer la régularité.

L'énergie idéale est celle d'un *poids* attaché à un fil et qui tombe en exerçant sur le fil une force qui entraîne le rouage et provoque les impulsions de l'échappement. Le fil est enroulé sur un cylindre qui peut entraîner une roue dentée engrenant avec le premier pignon du rouage.

Le poids  $p$  descend tandis que le rouage et les aiguilles tournent, que le temps s'écoule (fig. 24). Si le poids  $p$ , exprimé en kilogrammes, est descendu de  $h$  mètres, le travail effectué vaut :

$$ph \text{ kilogrammètres.}$$

Le poids ne peut pas descendre indéfiniment ; l'énergie maximum qu'il peut transmettre est  $pH$  kilogrammètres,  $H$  désignant la plus grande distance que le poids peut parcourir.

Le poids tend à faire tourner la roue  $O$  dans le sens de la flèche ; la roue est soumise à un couple de moment constant  $pr$ . La roue est donc toujours sollicitée avec la même intensité.

Avec le poids, le problème de la force motrice constante serait résolu, s'il n'y avait pas de résistances, en particulier des frottements, qui diminuent plus ou moins son efficacité.

Le poids suspendu au bout d'un fil flexible ne tolère pas d'être bousculé ; il lui faut une certaine distance verticale à parcourir ; bref, il est inutilisable dans les montres dont la position varie fréquemment.

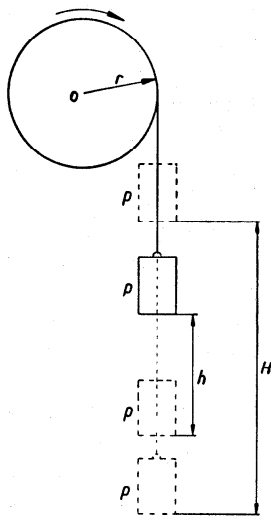


Fig. 24

Le ressort utilisé dans les appareils portatifs est une lame généralement en acier trempé et revenu, de section à peu près rectangulaire, enroulée en spirale. Il est logé dans une cage, le barillet, portant une couronne dentée ; il est fixé par une extrémité à la cage, par l'autre à l'arbre autour duquel le barillet tourne librement. L'arbre de barillet peut tourner dans un sens seulement ; alors, il entraîne l'extrémité intérieure du ressort et en augmente le nombre de spires : il « arme » le ressort. Dès que celui-ci est tendu (armé), il cherche à se détendre et à faire tourner l'arbre en sens contraire, mais comme ce mouvement est impossible, il agit alors par son autre extrémité sur la cage et sur la couronne dentée qui est en liaison avec le rouage ; le barillet tourne autour de l'arbre immobile.

Pour faire tourner le barillet, il faut une force dont nous envisageons le moment par rapport à l'axe de rotation ; ainsi, dans le cas du ressort, nous parlerons du *moment élastique du ressort par rapport à l'axe du barillet* ou, pour simplifier le langage, du *moment élastique du ressort*, ou du *moment du ressort*. Ce moment dépend des dimensions du ressort, des propriétés élastiques du métal dont il est formé et de l'angle dont il a été armé à partir de sa position détendue (position de repos) qui est celle qu'il prend lorsque, hors du barillet, il est posé sur une table.

Le moment du ressort est variable puisqu'il dépend du degré de tension du ressort qui diminue au fur et à mesure que le rouage, entraîné par le barillet, détend le ressort.

Au point de vue de la régularité de la force, de la constance des impulsions et partant de la régularité de la marche de l'appareil horaire, le poids est plus favorable que le ressort. Mais, jusqu'à présent, les horlogers n'ont pas trouvé de meilleure source d'énergie pour les appareils portatifs que le ressort enroulé en spirale dans le barillet. Ils se sont, de tout temps, efforcés d'atténuer les inconvénients résultant de l'irrégularité de la force du ressort ; ils ont imaginé bien des dispositifs — *stackfreed*, fusée, force constante — qui ont été ou qui sont encore employés malgré les complications qu'ils entraînent.

Dans les montres, la place dont dispose le ressort pour sa détente est limitée ; le ressort enfermé dans le barillet, le remplit en grande partie ; les spires se touchent souvent et ce frottement diminue la force disponible pour actionner le rouage. Les constructeurs de montres ont imaginé des dispositifs — les brides — pour atténuer le frottement des spires les unes contre les autres.

**Les organes du remontage.** — Lorsque, dans une pendule, le poids est arrivé au bas de sa course, la pendule s'arrête ; il faut remonter le poids afin qu'il puisse de nouveau, en descendant, actionner le rouage et

l'échappement et entretenir le mouvement du pendule. Cette restauration de la force motrice s'appelle le *remontage* et, par analogie, le même terme est utilisé dans les montres à ressort où l'opération ne consiste pas à « remonter » le ressort, mais à le tendre, à l'armer, à le bander.

On peut remonter le poids d'une pendule à la main soit en tirant sur une corde, soit en actionnant une manivelle ; le remontage peut être rendu automatique au moyen d'un petit moteur électrique enclenché au moment où le poids arrive au bas de la descente et déclenché dès qu'il est remonté.

Le problème mécanique à résoudre ici consiste à relier deux organes : le tambour *A* (fig. 25) fixé

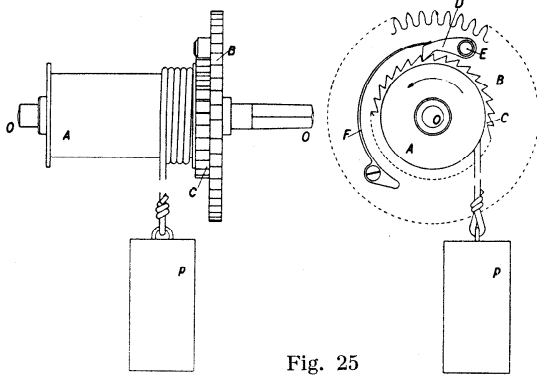


Fig. 25

sur l'arbre *OO* et sur lequel est enroulée la corde soutenant le poids *p*, tambour qui doit pouvoir tourner dans les deux sens ; la roue dentée *B*, libre sur *OO* et qui ne doit avoir qu'un sens de rotation. Cette liaison se fait au moyen d'une roue dentée spéciale — la *roue à rochet* ou le *rochet C* — solidaire du tambour *A* et d'un *cliquet D* mobile autour du point *E* et maintenu contre les dents du rochet par un *ressort F*. Le cliquet et son ressort sont fixés sur la roue *B*. L'ensemble, rochet, cliquet et ressort, forme l'*encliquetage*. Pour remonter le poids, on fait tourner l'arbre *OO*, le tambour *A* et le rochet *C* dans le sens de la flèche : les dents du rochet glissent devant le cliquet et la roue *B* reste immobile.

Lorsque la pendule marche, le poids descend et entraîne l'arbre *OO*, le tambour *A* et le rochet *C* dans le sens contraire à celui de la flèche. La dent du rochet entraîne le cliquet *D* et oblige la roue *B* à tourner ; mais celle-ci, en liaison avec le rouage, ne peut tourner que très lentement au fur et à mesure que le régulateur libère la dernière roue du rouage et permet à une dent de « s'échapper », d'où le nom de roue d'échappement donné à cette roue.

Dans les montres à ressort, le remontage consiste à enrouler le ressort autour d'une pièce, la *bonde*, solidaire de l'arbre de barillet. Ici, l'arbre ne peut tourner que dans un sens, celui de l'enroulement du ressort. Une fois armé, le ressort tend à se dérouler et comme l'arbre ne peut obéir à la sollicitation du ressort, c'est le barillet avec sa couronne dentée qui tourne au fur et à mesure que le balancier libère la roue

d'échappement, la dernière roue du rouage dont fait partie le barillet. Pour ne laisser à l'arbre qu'un sens possible de rotation, on emploie aussi un rochet, un cliquet et un ressort ; les deux dernières pièces ne sont pas fixées sur le barillet, mais sur une pièce fixe de la montre, généralement sur le pont de barillet.

Il y a donc une différence entre le système utilisé dans les horloges à poids et celui des montres à ressort. Dans les pendules, le tambour *A* est indépendant de la roue *B* ; les deux pièces sont reliées par l'encliquetage ; l'arbre du tambour est solidaire de *A* mais pas de la roue *B*. Dans les montres, l'arbre de barillet porte la bonde sur laquelle s'enroule le ressort, mais l'arbre et la bonde ne tournent que dans un sens ; la rotation dans l'autre sens est empêchée par l'encliquetage. En se détendant, le ressort fait tourner le barillet et, avec lui, le rouage. La liaison entre la bonde sur laquelle s'enroule le ressort et la roue dentée (barillet) qui actionne le rouage se fait ici par le ressort de barillet.

On cherche à rendre le remontage automatique. Dans les horloges à poids, on y parvient en chargeant un moteur électrique de remonter le poids sans que l'homme intervienne. Dans les montres-bracelet à ressort, on utilise actuellement une invention du XVIII<sup>e</sup> siècle : une pièce massive pivotant autour d'un arbre est déplacée par les mouvements du bras du porteur de la montre ; ce déplacement agit sur un dispositif qui tend le ressort. Dans certains cas, on utilise les variations de la température ou de la pression atmosphérique.

A côté de l'agrément d'avoir une horloge ou une montre dont la force motrice est restaurée automatiquement, il faut considérer, dans les instruments à ressort, l'avantage d'une force motrice plus régulière que celle des constructions habituelles. Pour que cet avantage soit pleinement utilisé, il faudrait que le facteur provoquant le remontage agît sinon constamment, du moins à courts intervalles. Or cela n'est entièrement réalisé ni par les variations de température ou de pression ni par les mouvements du bras qui, pendant la nuit, n'agissent pas du tout, quand la montre est déposée sur la table de nuit, ou agissent peu si le porteur dort en gardant sa montre au bras.



## CHAPITRE IV

### LA FORCE MOTRICE

**Force motrice ou force d'entretien des oscillations du pendule ou du balancier.** — La force motrice nécessaire dépend de l'amplitude de l'organe oscillant; les impulsions d'entretien doivent être d'autant plus fortes que l'amplitude est plus grande. Le travail du poids ou du ressort se transmet à l'organe régulateur à travers le rouage et l'échappement; une partie de ce travail est utilisée pour vaincre les résistances, principalement les frottements des pivots dans les coussinets, des dents des roues entre elles, des pièces de l'échappement et l'inertie des mobiles. Celle-ci n'est pas négligeable puisque les mobiles ont un mouvement saccadé et que, généralement, ils doivent être mis en mouvement plusieurs fois par seconde.

Considérons trois des grandeurs qui interviennent dans cette transmission de l'énergie, à savoir :

a) les forces ou les pressions exercées par les dents d'une roue sur les dents du pignon avec lequel elle engrène ;

b) les moments de ces forces par rapport aux axes des mobiles ;

c) le travail effectué pendant un certain temps.

D'une roue à l'autre, les forces se modifient.

Supposons que la force

motrice soit celle d'un poids  $p$  agissant sur un tambour de rayon  $\varrho$  (fig. 26) ; sur l'axe  $O_1$  du tambour est fixée la roue dentée de rayon  $r_1$  qui engrène dans le premier pignon de rayon  $r_2$  dont l'axe  $O_2$  porte la

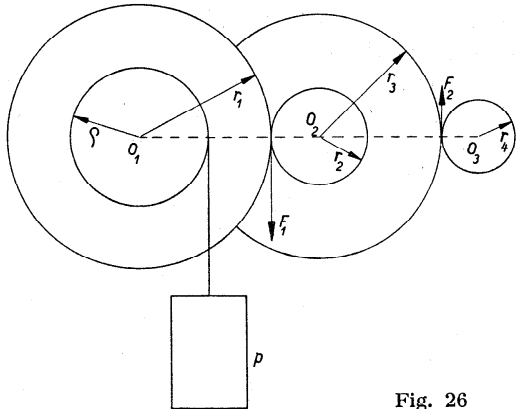


Fig. 26

roue dentée de rayon  $r_3$  qui entraîne le pignon de rayon  $r_4$  monté sur l'axe  $O_3$ .

Les dents de la roue motrice exercent sur les ailes du premier pignon une force  $F_1$  dont la valeur est :

$$F_1 = \frac{pq}{r_1};$$

$pq$  est le moment de la force  $p$  par rapport à l'axe  $O_1$ .

La force  $F_2$  exercée par les dents de la première roue sur les ailes du second pignon a pour valeur :

$$F_2 = \frac{F_1 r_2}{r_3}.$$

Dans les rouages d'horloges et de montres  $r_2 < r_3$ , par conséquent  $F_2 < F_1$ . *La force exercée diminue d'un engrenage à l'autre.*

Qu'en est-il des moments ? Le moment de la force  $p$  par rapport à  $O_1$  est  $M_0 = pq$ . Le moment de la force  $F_1$  par rapport à  $O_2$  est :

$$M_1 = F_1 r_2 = \frac{pq}{r_1} r_2 = M_0 \frac{r_2}{r_1}.$$

Puisque  $r_2 < r_1$ , nous avons  $M_1 < M_0$ . Le moment de la force  $F_2$  par rapport à  $O_3$  est :

$$M_2 = F_2 r_4 = \frac{F_1 r_2}{r_3} r_4 = M_1 \frac{r_4}{r_3}.$$

Nous avons  $M_2 < M_1$  puisque  $r_4 < r_3$ . *D'un axe à l'autre, les moments des forces qui font mouvoir les mobiles diminuent.*

Nous n'avons pas tenu compte des résistances ; ici la diminution de la force ou du moment ne provient pas d'elles. Dans les formules que nous avons établies, il n'y a pas l'expression d'une *perte*, mais celle d'une diminution de la force ou du moment, diminution qui est compensée par une augmentation de la vitesse ou du chemin parcouru.

Dès que nous ferons intervenir les résistances (frottements, inertie), nous aurons une nouvelle diminution de la force et du moment qui ne sera pas compensée par une augmentation de la vitesse.

Considérons maintenant le travail transmis à travers le rouage et l'échappement pendant la durée  $T$  d'une oscillation.

Le poids  $p$  suspendu à une corde enroulée sur le tambour de rayon  $q$  tourne, pendant cette durée, d'un très petit angle  $\alpha$  que nous exprimerons en radians ; le travail fourni par le poids  $p$  pendant le temps  $T$  est :

$$W_0 = pq\alpha,$$

puisque  $qa$  est le chemin parcouru par le point d'application de la force  $p$ .

Lorsque la roue motrice a tourné de l'angle  $\alpha$ , elle a obligé le premier pignon à tourner d'un angle  $\beta$  (fig. 27); les chemins parcourus par les points de contact des dents autour des axes  $O_1$  et  $O_2$  sont égaux, donc :

$$r_1\alpha = r_2\beta$$

ou

$$\beta = \alpha \frac{r_1}{r_2}.$$

Puisque  $r_1 > r_2$ , nous avons  $\beta > \alpha$ .

Le travail de la force  $F_1$  dans la rotation autour de l'axe  $O_2$  a pour valeur :

$$W_1 = F_1 r_2 \beta = \frac{pq}{r_1} r_2 \alpha \frac{r_1}{r_2} = pq\alpha = W_0.$$

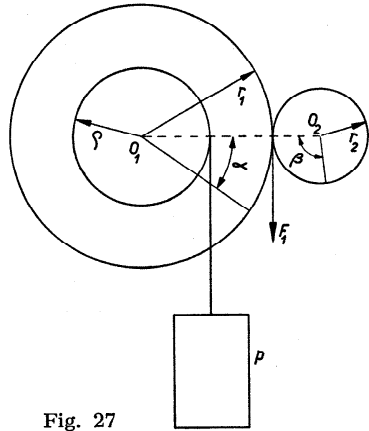


Fig. 27

Ainsi, lorsque nous faisons abstraction des résistances, le travail se transmet intégralement de l'axe moteur à celui de la première roue; il en est ainsi à travers tout le rouage et l'échappement.

Dans la réalité, nous ne pouvons pas ignorer les résistances qui sont parfois difficiles à évaluer parce que variables et très dépendantes des soins apportés à la construction du mouvement.

Proposons-nous de déterminer le poids nécessaire pour faire marcher une horloge à pendule. Pour résoudre ce problème, il faut connaître entre autres l'amplitude normale du pendule et la diminution de l'amplitude du pendule libre d'une oscillation à l'autre, c'est-à-dire son amortissement. Nous pouvons alors calculer l'énergie dissipée au cours d'une oscillation ou l'énergie qui doit être remplacée par l'impulsion de l'échappement.

Soit un pendule libre de longueur  $l = OA$  et de poids  $P$ ; nous supposons que toute la masse du pendule est répartie à proximité du point  $A$  (fig. 28).

L'énergie potentielle du pendule en  $OB$  est :

$$P \cdot DA = Ph_1 = Pl(1 - \cos \varphi_1).$$

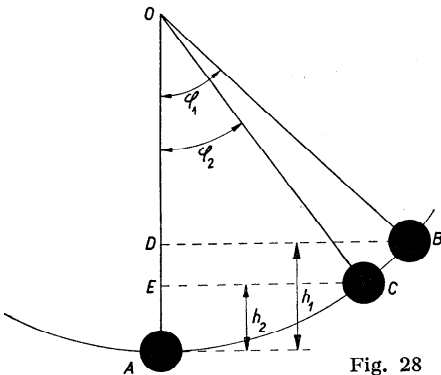


Fig. 28

Après une oscillation, le pendule ne revient pas en  $OB$ , mais en  $OC$ ; à ce moment, son énergie potentielle est :

$$P \cdot EA = Ph_2 = Pl(1 - \cos \varphi_2).$$

L'énergie potentielle perdue est :

$$P(h_1 - h_2) = Pl(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1).$$

C'est l'énergie qu'il faut restituer à chaque oscillation pour que l'amplitude  $\varphi_1$  soit maintenue.

Faisons abstraction des résistances; le travail se transmet intégralement à travers le rouage et l'échappement. Pendant la durée d'une oscillation, le poids  $p$  fournit un travail représenté par  $W_0 = pqa$ . Il faut que :

$$pqa = Pl(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1),$$

d'où :

$$p = \frac{Pl(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1)}{qa}.$$

Nous connaissons le rayon  $\varrho$  du tambour autour duquel s'enroule la corde supportant le poids moteur  $p$ . Nous connaissons aussi le rouage et nous savons que le tambour et la roue motrice font un tour en  $n$  heures ou en  $3600 n$  secondes.

En une seconde, le tambour tourne d'un angle égal à :

$$\frac{2\pi}{3600 n};$$

au bout de  $T$  secondes cet angle sera :

$$a = \frac{2\pi T}{3600 n}.$$

La formule du poids moteur devient :

$$p = \frac{Pl(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \cdot 3600 n}{2\pi T \varrho}.$$

Pour un pendule à seconde, nous avons  $T = 2$ , d'où :

$$p = \frac{Pl(\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \cdot 900 n}{\pi \varrho}.$$

Cette formule est purement théorique puisqu'elle ne tient compte ni du travail absorbé par les frottements des pivots et des dents ni de l'inertie des mobiles ni des imperfections des engrenages et de l'échappement. Elle contient du reste un facteur qui ne peut être déterminé

qu'empiriquement et pour chaque cas particulier. En effet,  $\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1$  dépend de la construction du pendule et est fonction de la résistance de l'air dans lequel il oscille et de celle de la suspension.

Il n'est donc guère possible de déterminer par le calcul le poids nécessaire à l'entretien des oscillations d'amplitude  $\varphi_1$  d'un pendule dont seuls le poids et la longueur sont connus.

L'horloger expérimenté sait évaluer approximativement la perte d'énergie due aux résistances; son expérience lui permet d'estimer approximativement un poids qui n'aura besoin que d'une légère correction.

En raison de l'usure des pièces, il est avantageux de réduire autant que possible le poids du moteur. Pour cela il faut imposer au pendule une amplitude minimum (ce qui a encore d'autres avantages dont nous parlerons plus tard); l'amortissement est réduit par le choix judicieux de la forme de la lentille du pendule qui doit vaincre facilement la résistance de l'air et par les soins apportés à la suspension. Dans certaines horloges de haute précision, le pendule est placé sous une cloche étanche dans laquelle un vide plus ou moins complet règne.

L'action du poids moteur est d'autant plus efficace que les résistances dans les engrenages et l'échappement sont plus faibles. Il convient donc de diminuer les frottements en utilisant des pivots et des coussinets durs, bien polis et graissés, en exécutant les dents des roues et des pignons ainsi que les pièces de l'échappement de façon aussi parfaite que possible; il faut également atténuer l'inertie des mobiles sans en compromettre la solidité.

**Le poids simple.** — Un poids suspendu à une corde enroulée sur un tambour mobile autour d'un axe fait tourner ce tambour si rien n'entrave le mouvement. Une roue dentée solidaire du tambour entraînera le pignon dans lequel elle engrène, et ainsi de suite, le mouvement se transmettant à travers le rouage et l'échappement jusqu'à l'organe régulateur.

L'action du poids  $p$  sur le tambour de rayon  $\varrho$  est fonction de son moment  $M_0 = p\varrho$  par rapport à l'axe du tambour. Ce moment est constant à la condition que  $p$  et  $\varrho$  le soient. Au premier abord, il semble que cette condition est toujours remplie.

Cependant en examinant la figure 29, nous voyons que la force qui sollicite le tambour n'est pas seulement le poids  $p$ , mais aussi le poids de la corde ou de la chaîne. Au poids  $p$ , il faut ajouter celui de la corde

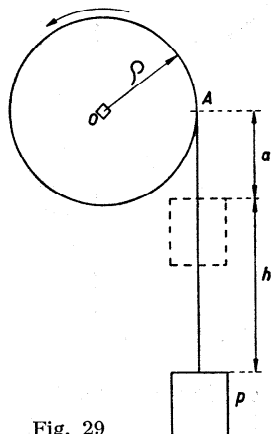


Fig. 29

à partir du point A. Supposons que la corde pèse  $p'$  par unité de longueur, par exemple  $p'$  grammes au mm. Lorsque le poids  $p$  est au haut de sa course, le poids agissant est :

$$p + ap'.$$

Lorsque le poids est descendu de  $h$ , le poids agissant est :

$$p + (a + h) p'.$$

Il a augmenté de  $hp'$  ; il n'est donc pas constant. Le poids de la corde n'est pas toujours négligeable ; il est même respectable dans les horloges où le poids est suspendu à une chaîne métallique.

Dans les horloges de précision, le poids est généralement suspendu à un fil de cordonnet pour lequel  $p'$  est égal à environ 0,001 g\*/mm. Pour les chaînes utilisées dans certaines horloges,  $p'$  peut atteindre 0,1 g\*/mm.

Pour apprécier l'influence du poids de la corde ou de la chaîne, il faut comparer ce poids au poids moteur. Ainsi le cordonnet dont nous avons donné le poids au mm est utilisé avec un poids moteur de 1540 g\*, et la hauteur maximum de descente est 800 mm. Le poids de ce cordonnet complètement déroulé est  $0,001 \cdot 800 = 0,8$  g\*, ce qui représente 0,05 % du poids moteur.

Une chaîne pesant 0,05 g\*/mm supporte un poids de 3200 g\* dont la descente maximum est de 1200 mm ; elle peut augmenter la force motrice de  $0,05 \cdot 1200 = 60$  g\*, soit d'environ 1,9 %.

La corde est enroulée sur le tambour et si les spires se touchent, elles peuvent en couvrir toute la surface. Il arrive que, par suite d'un enroulement mal fait ou d'un tambour trop court, certaines spires chevauchent sur d'autres. A ce moment, le rayon  $\rho$  du tambour est augmenté d'une quantité égale ou inférieure à l'épaisseur de la corde. Ce cas n'arrive pas dans les pendules de précision.

Lorsque les spires se touchent, il se produit un frottement entre les brins, c'est-à-dire une perte de force. Pour éliminer ou tout au moins diminuer ce frottement, il y a lieu d'utiliser des tambours filetés sur lesquels la corde est obligée de s'enrouler normalement.

**Le poids mouflé.** — La fréquence du remontage d'une horloge à poids est d'autant plus petite que la hauteur offerte au poids pour sa descente est plus grande. Pour diminuer cette fréquence, on fait les cabinets de

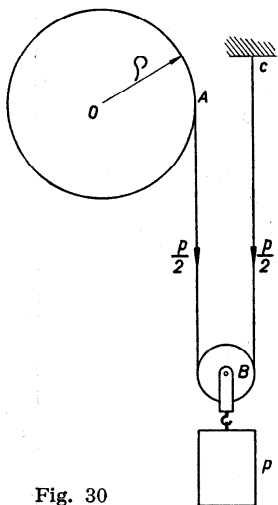


Fig. 30

pendules souvent beaucoup plus longs que le pendule lui-même. Cette solution n'est pas toujours recommandable, aussi cherche-t-on à obtenir le même résultat par d'autres moyens dont le plus répandu est la moufle.

Le poids  $p$  n'est plus attaché à la corde, mais à la chape d'une poulie mobile  $B$  autour de laquelle passe la corde attachée au tambour et à un point fixe  $C$  (fig. 30).

Pour une rotation complète du tambour  $O$ , la corde se déroule de  $2\pi\rho$ , mais la poulie  $B$  et le poids  $p$  ne descendent que de  $\pi\rho$ . La hauteur de descente est diminuée de moitié.

Le poids  $p$  soutenu par 2 brins exerce sur chacun d'eux une tension égale à  $\frac{p}{2}$ . Pour obtenir sur le tambour, le rouage, l'échappement et le pendule le même effet qu'avec un poids simple égal à  $p$ , il faut, dans le cas d'une moufle à 2 brins, un poids égal à  $2p$ . Pendant un tour de tambour, le travail fourni par le poids moteur sera, dans le cas du poids simple égal à  $p$ :

$$p \cdot 2\pi\rho,$$

dans le cas du poids  $2p$  mouflé à 2 brins :

$$2p \cdot \pi\rho \quad \text{ou} \quad p \cdot 2\pi\rho.$$

On peut imaginer des moufles à 3, 4, ... brins (fig. 31) au moyen desquelles on réduit la descente du poids dans la proportion 3, 4, ..., mais il faut augmenter le poids dans la même proportion si l'on veut obtenir le même effet mécanique.

Ceci est une illustration du principe des travaux virtuels.

**Le remontage à ressort auxiliaire.** — Pour remonter le poids de l'horloge, on place généralement une manivelle sur le carré de l'arbre du tambour  $O$  (fig. 29) et l'on fait tourner le tambour dans le sens de la flèche. Pendant cette opération, l'effet du poids est neutralisé par l'effort exercé sur la manivelle; l'arbre  $O$  et le rouage ne sont plus sollicités comme ils le sont quand le poids agit seul. Il en résulte que les aiguilles ne tournent plus pendant les quelques secondes que dure le remontage. Un tel arrêt est inadmissible dans les horloges de précision.

Le remontage à ressort auxiliaire fait disparaître ce défaut. C'est un

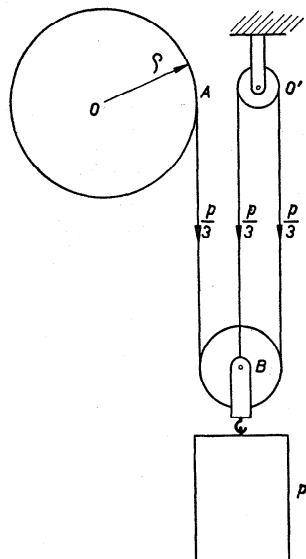


Fig. 31

mécanisme dans lequel l'action du poids est remplacée par celle d'un ressort pendant la durée du remontage.

La figure 32 représente une forme d'exécution de ce dispositif. L'arbre  $O$ , le tambour  $T$  et le rochet  $R_1$  sont solidaires; le rochet  $R_2$ , libre sur l'arbre  $O$ , porte le cliquet  $C_1$  et le ressort  $F_1$  qui, avec  $R_1$ , forment l'encliquetage servant à remonter le poids.  $C_2$ ,  $F_2$  et  $R_2$  forment un autre encliquetage qui permet à la roue dentée  $B$  libre sur l'arbre  $O$  de tourner dans le sens de la flèche, mais dans ce sens seulement. Un ressort à boudin  $F_3$  fixé sur le rochet  $R_2$  et sur la roue  $B$  relie ces deux organes.

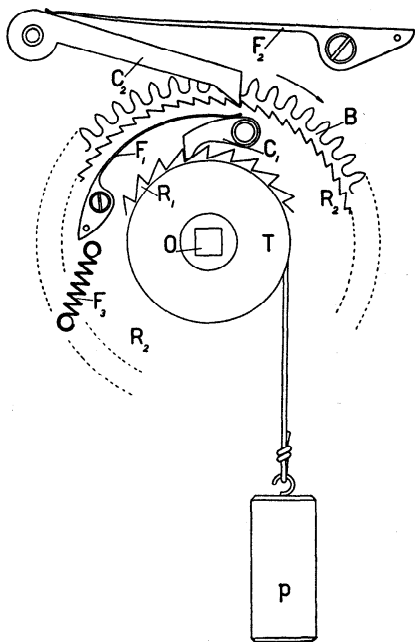


Fig. 32

Le poids moteur  $p$  tend à comprimer le ressort  $F_3$ . Pendant le remontage, cet effort de compression est supprimé et  $F_3$  se détend, poussant ainsi la roue  $B$  dans le sens de la flèche; cette poussée entretient la marche de l'horloge pendant le remontage.

Le ressort auxiliaire ne doit pas être complètement détendu à la fin du remontage.

**Le remontage à corde sans fin de Huygens.** — Huygens a résolu le problème en utilisant une corde sans fin (fig. 33) passant sur la poulie fixe  $T$ , sur la poulie fixe  $A$  solidaire de la première roue  $E$  du rouage et sur les poulies mobiles  $B$  et  $C$ . La poulie  $T$  porte le rochet  $R$  qui, avec

le cliquet  $D$ , ne permet à la poulie  $T$  qu'un sens de rotation, celui de la flèche 2. Les poulies mobiles supportent des poids  $P$  et  $p$  tels que  $P > p$ ; le poids  $p$  doit être suffisant pour tendre la corde. La poulie  $A$  et la roue  $E$ , sollicitées par la force  $\frac{P}{2} - \frac{p}{2}$ , tournent dans le sens de la flèche 1, tandis que le poids  $P$  descend. On remonte le poids  $P$  en tirant sur le brin  $ab$ ; pendant cette opération,  $T$  tourne dans le sens de la flèche 2, mais la roue  $E$  est toujours sous l'influence du poids  $P$ .

Pendant la marche de l'horloge,  $P$  descend tandis que  $p$  monte; pendant le remontage,  $P$  monte et  $p$  descend.



**Le travail du poids en un temps donné.** — Il est parfois utile de connaître le travail effectué par le poids en un temps donné, par exemple pendant une seconde ou pendant la durée d'une oscillation ou d'une alternance du pendule. Il suffira de calculer le travail exécuté pendant un tour de la première roue du rouage dont on connaît la durée de révolution.

Le problème est facile à résoudre pour le poids simple  $p$  agissant sur un tambour de rayon  $\varrho$ . La corde (ou la chaîne) se déroule de  $2\pi\varrho$  pendant une révolution du tambour; cette valeur représente aussi la hauteur dont est descendu le poids, de sorte que le travail fourni pendant une révolution du tambour vaut :

$$p \cdot 2\pi\varrho.$$

Si la roue qui tourne en même temps que le tambour fait un tour en  $n$  heures ou  $3600 n$  secondes, on aura, pour le travail en une heure :

$$\frac{p \cdot 2\pi\varrho}{n},$$

et, pour le travail en une seconde :

$$\frac{p \cdot 2\pi\varrho}{3600 n}.$$

Pendant une période de  $T$  secondes, le travail fourni par le poids sera :

$$\frac{p \cdot 2\pi\varrho \cdot T}{3600 n}.$$

Pour un poids mouflé, si la moufle a 2 brins, le déroulement de la corde de  $2\pi\varrho$  sur le tambour correspond à une descente du poids de  $\pi\varrho$ . Le travail de  $p$ , pendant une révolution du tambour, sera :

$$p \cdot \pi\varrho;$$

pendant une période  $T$  du pendule, il sera :

$$\frac{p \cdot \pi\varrho \cdot T}{3600 n}.$$

Dans le système de Huygens, le poids  $P$  (fig. 33) fait tourner le tambour  $A$ , la roue  $E$  et tout le rouage, mais en même temps il fait monter le

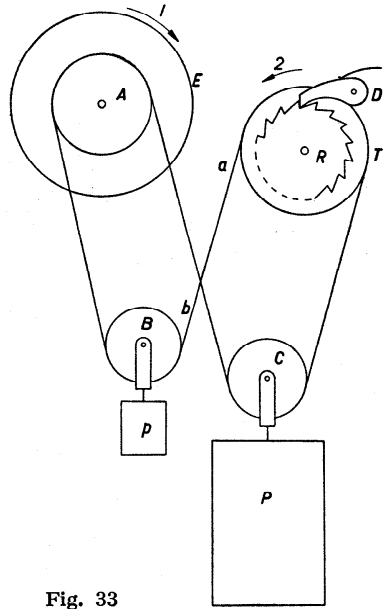


Fig. 33

poids  $p$ . Lorsque le tambour de rayon  $q$  fait un tour, la corde se déroule de  $2\pi q$ , le poids  $P$  descend de  $\pi q$  et le poids  $p$  monte aussi de  $\pi q$  ; le travail utile est :

$$(P - p) \cdot \pi q .$$

Pendant une période du pendule, il sera :

$$\frac{(P - p) \cdot \pi q \cdot T}{3600 n} .$$

Cette formule montre qu'on a avantage à réduire la valeur de  $p$ .

Les formules données ci-dessus ne tiennent pas compte des résistances telles que le frottement des arbres dans les coussinets ou de la corde dans les gorges du tambour et des poulies. Ces frottements sont loin d'être négligeables, surtout le dernier qui doit être assez grand pour que la corde ne puisse pas glisser sur la poulie. Pour assurer l'entraînement de celle-ci, Huygens munissait les gorges des poulies de pointes fines.

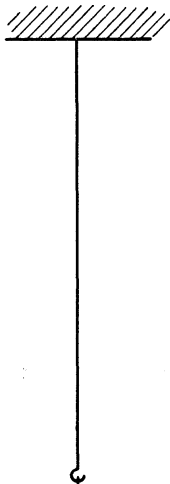


Fig. 34

On a toujours intérêt à diminuer les résistances qui obligent à employer une plus grande force motrice ; celle-ci provoque une plus grande usure des pièces. Il ne faut pas oublier que les résistances, surtout le frottement, sont souvent capricieuses et que leurs variations provoquent, dans l'action du poids, des irrégularités néfastes à la mesure précise du temps.

**Le ressort et l'élasticité.** — Dans les appareils destinés à être portés, tels que les montres, il n'est pas possible d'utiliser le pendule comme organe régulateur et le poids comme force motrice.

Le moteur d'une montre est constitué par un ressort enroulé en spirale, généralement en acier trempé et revenu de première qualité, et qui agit en vertu de ses propriétés élastiques.

L'élasticité est la propriété qu'ont certains corps de reprendre leur forme et leur grandeur primitives après avoir subi une déformation. Cette faculté a des limites ; si la déformation est trop grande, le corps, tout en ne gardant pas la forme correspondant à la plus grande déformation, ne reprend pas sa forme originale. On distingue les *déformations élastiques*, qui disparaissent dès que la force déformante cesse d'agir, les *déformations permanentes*, dont le nom indique la nature, et les *déformations subpermanentes*,

qui ne disparaissent qu'un certain temps après l'action de la force déformante.

Une tige verticale (fig. 34) encastrée à une extrémité et à laquelle on attache un poids  $p$ , s'allonge d'une certaine quantité qui, si elle est très petite, disparaît dès que la charge cesse d'agir; l'allongement est dit élastique.

Une masse de gaz, enfermée dans un cylindre (fig. 35) puis comprimée à l'aide d'un piston, refoule le piston dès qu'on cesse d'agir sur celui-ci et reprend son volume primitif.

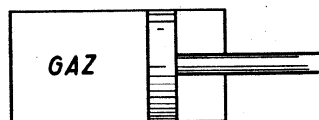


Fig. 35

Une pièce de métal ou de bois (fig. 36) encastrée horizontalement et chargée à son extrémité, fléchit sous le poids, mais se redresse dès que la charge cesse d'agir.

Dans le premier exemple, on a affaire à l'élasticité de traction; dans le second, à l'élasticité de compression, et dans le troisième, à l'élasticité de flexion. On reviendra plus tard sur l'élasticité de torsion.

Les déformations ne sont élastiques que si elles restent en dessous d'une certaine grandeur appelée *limite d'élasticité*. Quand on dit que la limite élastique de l'acier dur (acier à 0,9% C) recuit est  $45 \text{ kg}^*/\text{mm}^2$ , cela signifie que, quelle que soit sa longueur, une tige d'acier de  $1 \text{ mm}^2$  de section droite peut être chargée jusqu'à  $45 \text{ kg}^*$ , avant que des allongements permanents ne se produisent.

On ne peut appliquer les théories et les formules de l'élasticité qu'à des problèmes dans lesquels les déformations sont très petites, mais il ne faut pas oublier que, pour un ressort par exemple, de petites déformations s'ajoutent tout au long du ressort et peuvent donner lieu à un grand déplacement de l'extrémité.

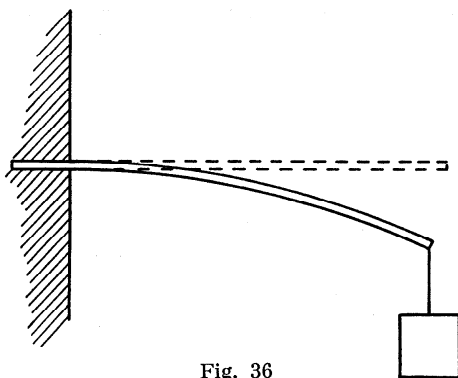


Fig. 36

**La loi de Hooke.** — Tant que les déformations restent élastiques, c'est-à-dire tant qu'elles restent très petites, elles sont proportionnelles à la force qui les provoque: c'est la *loi de Hooke*.

D'après les récents travaux (1946-1947) de Jaquerod, cette loi n'est rigoureusement valable que dans certains cas; elle est nettement modifiée par les traitements thermiques par exemple.

La loi de Hooke est cependant encore appliquée dans les calculs de la résistance des matériaux et nous l'utiliserons pour déterminer le moment élastique des ressorts et des spiraux.

Appliquons-la au calcul de l'allongement  $\Delta L$  d'une barre de longueur  $L$  et de section droite  $S$  supportant un poids  $p$ . L'allongement  $\Delta L$  est d'autant plus grand que la force de traction  $p$  et la longueur  $L$  sont plus grandes ; il est plus petit lorsque la section  $S$  augmente ; enfin il dépend du matériau dont est formée la barre. Nous pouvons écrire :

$$\Delta L = \frac{1}{E} \frac{pL}{S}. \quad (1)$$

$E$  est un coefficient qui caractérise la matière ; pour l'acier, il n'est pas le même que pour le laiton ou le bois.

Proposons-nous de calculer l'allongement d'une tige de 1000 mm de longueur, de 1 mm<sup>2</sup> de section, chargée d'un poids de 10 kg\*. La tige est en acier pour lequel  $E = 20\,000$  kg\*/mm<sup>2</sup>. La formule (1) donne :

$$\Delta L = \frac{1}{20\,000} \frac{10 \cdot 1000}{1} = 0,5 \text{ mm.}$$

**Le module d'élasticité.** — Le coefficient  $E$  est appelé *module d'élasticité*, *module de traction* ou *module d'Young*. Il intervient dans les calculs concernant la traction, la compression et la flexion, mais pas dans ceux qui s'appliquent à la torsion. Pour ce dernier cas, il existe un autre coefficient que l'on appelle aussi module d'élasticité. Pour éviter les confusions, il faut dire : module d'élasticité de torsion et module d'élasticité de traction. Ces expressions un peu longues sont souvent remplacées par « module d'Young » (module de traction) et « module de Coulomb » (module de torsion).

Reprenons la formule (1) :

$$\Delta L = \frac{pL}{ES}.$$

De deux tiges de dimensions identiques, celle qui a le plus grand module s'allongera le moins sous l'influence d'une charge donnée. Pour provoquer le même allongement dans les deux tiges, il faut un poids (ou une force) d'autant plus grand que le module d'Young est plus grand.

De la formule (1) nous tirons :

$$E = \frac{pL}{S \cdot \Delta L}.$$

Comme  $\frac{L}{\Delta L}$  est un nombre pur,  $E$  a les dimensions d'une force divisée

par une surface. Le module d'Young doit donc s'exprimer en unités de pression, par exemple en  $\text{kg}^*/\text{cm}^2$  ou  $\text{kg}^*/\text{mm}^2$  dans un système d'unités dérivé du système M.Kf.S., en  $\text{dyne}/\text{cm}^2$  ou barye dans le système C.G.S.

Voici, exprimées en  $\text{kg}^*/\text{mm}^2$ , quelques valeurs approximatives de  $E$  :

|   |                 |
|---|-----------------|
| Aluminium . . . . .                                 | 7 000           |
| Argent . . . . .                                    | 7 500           |
| Cuivre . . . . .                                    | 10 000          |
| Fer . . . . .                                       | 20 000          |
| Nickel . . . . .                                    | 22 000          |
| Palladium . . . . .                                 | 11 000          |
| Rhodium . . . . .                                   | 28 000          |
| Glucinium . . . . .                                 | 30 000          |
| Tungstène . . . . .                                 | 36 000          |
| Bronze (0,88 Cu ; 0,12 Sn) . . . . .                | 10 000          |
| Laiton (0,60 Cu ; 0,40 Zn) . . . . .                | 9 200           |
| Maillechort (0,60 Cu ; 0,20 Ni ; 0,20 Zn) . . . . . | 10 800          |
| Acier . . . . .                                     | 20 000 à 22 000 |
| Platine iridié (0,90 Pt ; 0,10 Ir) . . . . .        | 21 400          |

Pour exprimer ces valeurs au moyen des unités du système C.G.S., il faut les multiplier par  $981\,000 \cdot 100 = 9,81 \cdot 10^7$ .

Ainsi le module d'Young du fer est :

$$E = 20\,000 \text{ kg}^*/\text{mm}^2 = 19,62 \cdot 10^{11} \text{ dynes}/\text{cm}^2.$$

Les dimensions du module d'Young sont :

$$[E] = L^{-1} MT^{-2}.$$

**Détermination expérimentale de  $E$ .** — On peut déterminer  $E$  en faisant l'expérience de traction décrite ci-dessus et en mesurant les grandeurs  $p$ ,  $L$ ,  $S$  et  $\Delta L$ .

Le module d'Young de l'acier d'un ressort de barillet a été déterminé par cette méthode au Laboratoire fédéral d'essais des matériaux à Zurich. Les dimensions de la lame étudiée étaient : épaisseur 0,11 mm, hauteur 1,58 mm, section  $0,11 \cdot 1,58 = 0,174 \text{ mm}^2$ , longueur 20 mm. Pour une charge de 16  $\text{kg}^*$ , l'allongement a été de 0,0887 mm. On trouve :

$$E = \frac{pL}{S \cdot \Delta L} = \frac{16 \cdot 20}{0,174 \cdot 0,0887} = 20\,734 \text{ kg}^*/\text{mm}^2.$$

L'exactitude du résultat dépend de la précision des mesures ; certaines grandeurs, en particulier la section et l'allongement, ne sont pas

faciles à déterminer très exactement. De plus, la formule utilisée a été déduite en admettant que la section reste constante tout le long de la lame.

Voici une autre détermination faite au Laboratoire suisse de recherches horlogères. On a utilisé la flèche  $\lambda$  (fig. 37) d'une tige d'acier ronde, encastree en A et chargée à son

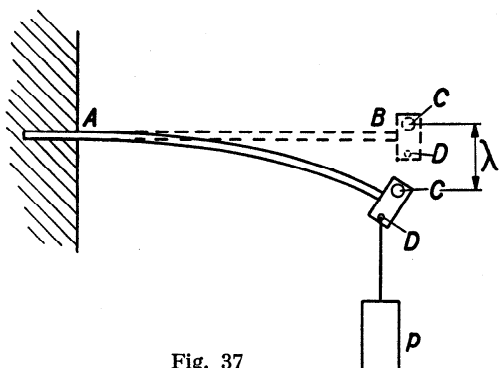


Fig. 37

extrémité B d'un poids  $p$ .

Si  $r$  est le rayon de la tige,  $L$  sa longueur, on a, pour de petites déformations élastiques :

$$\lambda = \frac{4L^3 p}{3\pi r^4 E},$$

d'où l'on tire :

$$E = \frac{4L^3 p}{3\pi r^4 \lambda}.$$

Les grandeurs  $L$  et  $r$  qui interviennent à la troisième et à la quatrième puissances doivent être mesurées avec le plus grand soin.

Voici la marche d'une expérience : la tige d'acier non trempé portait à son extrémité une pièce très légère en aluminium qui avait en C une empreinte demi-sphérique polie et en D un trou à travers lequel passait le fil soutenant le poids  $p$ . Une lampe placée à 5 m de distance éclairait l'empreinte C et y marquait un point lumineux très net observé au moyen d'une lunette munie d'une échelle graduée ; ce dispositif permettait de mesurer la flèche  $\lambda$  avec une grande précision.

La longueur  $L$  de 83 mm environ était mesurée au centimillimètre sur la machine à pointer Hauser. Cette valeur doit être prise sur une tige bien droite ; un bon moyen de redresser la tige est de la chauffer au rouge au moyen d'un courant électrique, tandis qu'elle est tendue par un poids.

Le rayon  $r$  du fil fut déterminé par comparaison avec une jauge sur un optimètre Zeiss ; 10 mesures au moins étaient effectuées à différents endroits du fil et dans différents azimuts ;  $r$  était la moyenne de ces mesures.

Pour les déformations élastiques, c'est-à-dire lorsque la loi de Hooke peut être appliquée, on doit avoir :

$$\frac{\lambda}{p} = \text{constante.}$$

Les valeurs de  $p$  et de  $\lambda$  trouvées au cours de ces mesures sont données dans le tableau suivant dans lequel  $p$  est exprimé en grammes et  $\lambda$  en degrés de l'échelle dans la lunette :

| $p$    | $\lambda$ | $\frac{\lambda}{p}$ |
|--------|-----------|---------------------|
| 0      | 0         |                     |
| 0,0974 | 6,3       | 64,6817             |
| 0,1997 | 12,9      | 64,5969             |
| 0,2994 | 19,5      | 65,1003             |
| 0,4990 | 31,8      | 63,7275             |
| 0,7984 | 50,8      | 63,6273             |
| 0,999  | 63,6      | 63,6637             |

Exprimé en mm/g\*, le rapport  $\frac{\lambda}{p}$  a la valeur moyenne ;

$$\frac{\lambda}{p} = 2,395\,89 \text{ mm/g*}.$$

Les autres valeurs mesurées sont :

$$L = 81,51 \text{ mm},$$

$$r = 0,261\,05 \text{ mm (moyenne de 10 mesures).}$$

On obtient :

$$E = \frac{4 \cdot 81,51^3}{3\pi \cdot 0,261\,05^4 \cdot 2,395\,89} = 20\,656\,000 \text{ g*/mm}^2$$

ou

$$E \cong 20\,600 \text{ kg*/mm}^2.$$

Il est nécessaire de prendre beaucoup de précautions pour déterminer  $E$  avec un peu d'exactitude. On ne doit pas oublier que le module d'Young n'est pas une constante pour une matière donnée ; sa valeur dépend de la composition de la matière et peut être fortement influencée par la présence d'impuretés. Le module d'élasticité est aussi influencé, dans une plus faible mesure, par les traitements thermiques et mécaniques, c'est-à-dire par l'histoire de l'échantillon examiné.

Les valeurs de  $E$  que l'on trouve dans les traités ou dans les recueils de constantes doivent être considérées comme donnant seulement un ordre de grandeur.

**Variation du module d'Young avec la température.** — Le module d'élasticité de traction n'est pas une constante pour une matière donnée ; quand on parle du module d'élasticité de l'acier, il s'agit d'une grandeur qui varie d'un échantillon à l'autre à cause des différences de traitement et des différences dans la teneur en carbone ou en « impuretés » (soufre,

phosphore, silicium, manganèse, etc.). Mais le module d'Young n'est pas même une constante pour un échantillon déterminé, car la température le modifie dans une mesure que les horlogers ne peuvent pas ignorer.

Soient  $E_\theta$  la valeur du module d'Young à  $\theta^\circ \text{C}$  et  $E_0$  la valeur du même module à  $0^\circ \text{C}$ ; les deux valeurs sont liées par la relation :

$$E_\theta = E_0 (1 - \alpha\theta). \quad (2)$$

Cette formule n'est vraie qu'en première approximation, et on verra plus tard qu'elle doit être complétée. Le symbole  $\alpha$  désigne une constante pour le même métal; sa valeur diffère d'un métal à l'autre. On appelle  $\alpha$  le *coefficient thermo-élastique*; en voici quelques valeurs approximatives :

|                     |                                 |
|---------------------|---------------------------------|
| acier . . . . .     | $\alpha = 250 \cdot 10^{-6}$    |
| argent . . . . .    | $\alpha = 750 \cdot 10^{-6}$    |
| cuivre . . . . .    | $\alpha = 370 \cdot 10^{-6}$    |
| aluminium . . . . . | $\alpha = 2\,150 \cdot 10^{-6}$ |

Un ressort en acier dont le module d'Young à  $0^\circ \text{C}$  est  $20\,000 \text{ kg}^*/\text{mm}^2$  aura à  $+30^\circ \text{C}$  un module égal à :

$$20\,000 (1 - 250 \cdot 10^{-6} \cdot 30) = 19\,850 \text{ kg}^*/\text{mm}^2.$$

Pour représenter plus exactement la relation entre  $E_0$  et  $E_\theta$ , il faut utiliser une formule de la forme :

$$E_\theta = E_0 (1 - \alpha\theta - \beta\theta^2). \quad (3)$$

Mais le coefficient  $\beta$  est beaucoup plus petit que  $\alpha$ . Pour un certain échantillon d'acier, il vaut  $\beta = 110 \cdot 10^{-9} = 0,000\,000\,11$ .

Une augmentation de la température entraîne une diminution du module et, par conséquent, une diminution de la force d'un ressort. Mais cette influence est négligeable sur les ressorts de barillet; par contre,

elle est très nette sur les spiraux et on ne peut avoir des montres précises si l'on n'arrive pas à la combattre ou à l'éliminer.

Pour les spiraux, on utilise maintenant des alliages complexes dont le module d'Young est à peu près constant dans l'intervalle des températures auxquelles les

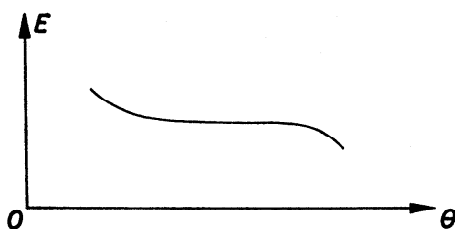


Fig. 38

montres sont généralement soumises. Ces alliages, qu'on peut désigner sous le nom générique d'*élinvars*, sont connus sous les noms d'élinvar, de métélinvar, de nivarox, d'isoval, etc.



Pour ces alliages, ni la relation exprimée par la formule (2) ni celle exprimée par la formule (3) ne sont utilisables.

La figure 38 représente la variation du module d'Young d'un acier-nickel additionné de chrome en fonction de la température.

**Traction et flexion.** — En suspendant un poids  $p$  à l'extrémité inférieure d'une tige verticale encastrée comme l'indique la figure 34, on allonge la tige. On peut supposer celle-ci composée d'une grande quantité de fils très minces, de fibres dont chacune subira un allongement qui sera le même pour toutes les fibres, si l'effort exercé par  $p$  est uniformément réparti sur toute la section droite. En réalité, cette dernière condition est très difficile à remplir.

Si l'on suspend un poids  $p$  à l'extrémité d'une tige horizontale encastrée comme l'indique la figure 39, ce poids provoque une flexion de la tige caractérisée par la flèche  $\lambda$ . Après la flexion, les fibres supérieures, par exemple celles qui composent la face  $ABFE$ , sont plus longues que les inférieures qui sont raccourcies. Entre les deux, il y a des fibres qu'on suppose avoir conservé leur longueur initiale; elles se trouvent dans le plan  $MNPO$  (fig. 40) qui est appelé le *plan des fibres neutres* (ou *plan neutre*).

Les fibres situées au-dessus de ce plan s'allongent; celles qui sont en dessous se raccourcissent; enfin les allongements et les raccourcissements sont d'autant plus grands que la fibre est plus éloignée du plan des fibres neutres.

Il y a donc une différence fondamentale entre les déformations provoquées par une traction et celles qui résultent d'une flexion; dans le premier cas toutes les fibres

sont également déformées (lorsque la force est également répartie sur toute la section); dans le second, les unes sont allongées, d'autres sont raccourcies, et cela de façon inégale suivant la position de la fibre,

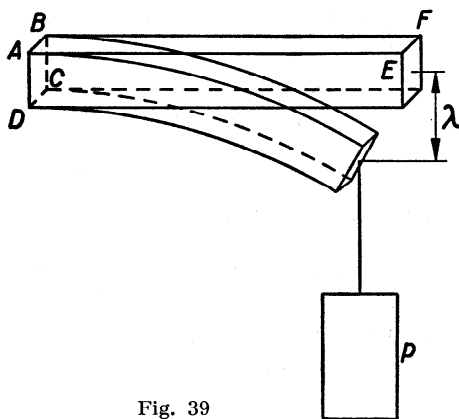


Fig. 39

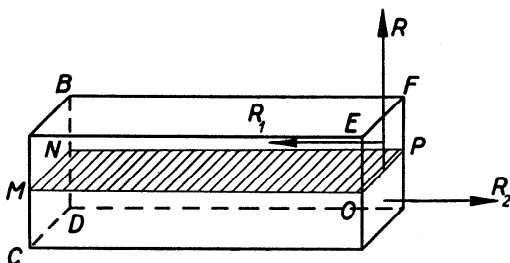


Fig. 40

tandis que celles du plan des fibres neutres ne subissent qu'un changement de forme sans modification de longueur.

Après la déformation et grâce à l'élasticité, toutes les fibres tendent à reprendre leur longueur et leur forme primitives; l'effort qu'elles exercent alors dépend naturellement de la grandeur de la déformation. Les fibres situées au-dessus du plan neutre exercent un effort dont la résultante peut être représentée par  $R_1$ , tandis que  $R_2$  est la résultante des forces qui tendent à allonger les fibres inférieures que la flexion a raccourcies.

Il y a aussi une force  $R$  de redressement qui tend à rendre à la tige la forme qu'elle avait avant la flexion.

Dans un ressort enroulé en spirale, les forces  $R_1$  et  $R_2$  forment un couple qui tend à faire tourner le ressort autour de son centre; si, comme dans le barillet, ce mouvement n'est pas possible, c'est le barillet qui sera mis en mouvement. Ce couple agit donc sur le barillet, sur le rouage, sur l'échappement et finalement sur le balancier, s'il s'agit d'une montre.

La force  $R$  est dirigée vers le centre du ressort; s'il s'agit d'un ressort enroulé dans un barillet, la force  $R$  ne peut provoquer aucune rotation du barillet puisque son moment par rapport à l'axe du barillet est nul; elle presse les pivots de l'arbre contre les trous du barillet et de son couvercle.

Lorsqu'une fibre de longueur  $L$  a été allongée de  $\Delta L$ , on admet, d'après la 3<sup>e</sup> loi de Newton, qui énonce l'égalité entre l'action et la réaction, que cette fibre exerce, pour reprendre sa longueur primitive, un effort égal à celui qui a été nécessaire pour la modifier. D'après la formule (1), cet effort est égal à :

$$\frac{\Delta L}{L} SE.$$

Les résultantes  $R_1$  et  $R_2$  de ces efforts forment un couple qui est la source même de l'énergie des ressorts de barillet utilisés dans les appareils horaires.

**Moment élastique d'un ressort de section symétrique par rapport au plan neutre, enroulé à l'une de ses extrémités et attaché à l'autre.** — Soit une lame de ressort de forme circulaire et de section symétrique par rapport au plan neutre. Appelons  $\theta$  (fig. 41) l'angle  $A_0OB_0$  exprimé en radians et formé par les rayons aboutissant aux extrémités  $A_0$  et  $B_0$  du ressort non déformé. En augmentant l'angle  $\theta$  de  $\alpha$ , nous armons le ressort dont le rayon des fibres neutres devient plus petit et passe de  $r_0$  à  $r$ . Pour  $\alpha > 0$ , nous avons  $r < r_0$ : le ressort est fermé; pour  $\alpha < 0$ ,

$r > r_0$  : le ressort est ouvert. Cette opération ne modifie pas la longueur  $L_0$  des fibres neutres ; nous avons :

$$L_0 = r_0 \theta = r (\theta + \alpha),$$

d'où nous tirons :

$$r = \frac{r_0 \theta}{\theta + \alpha}$$

ou

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{\alpha}{L_0}. \quad (4)$$

Envisageons une fibre à la distance  $a$  du plan neutre. A l'état non déformé, sa longueur est  $L_a$  ; après la déformation, elle devient  $L'_a$ . L'allongement est :

$$\Delta L_a = L'_a - L_a.$$

Mais

$$L_a = (r_0 + a) \theta, \quad L'_a = (r + a) (\theta + \alpha),$$

d'où :

$$\Delta L_a = (r + a) (\theta + \alpha) - (r_0 + a) \theta.$$

Puisque  $r (\theta + \alpha) = r_0 \theta$ , nous aurons finalement :

$$\underline{\underline{\Delta L_a = a \alpha.}}$$

*L'allongement d'une fibre située à la distance  $a$  du plan neutre ne dépend pas du rayon, mais seulement de la distance  $a$  et de l'angle  $\alpha$  dont le ressort a été armé.*

La grandeur  $a$  est positive pour les fibres situées plus loin du centre que les fibres neutres ; elle est négative pour les fibres intérieures.

L'allongement est positif quand  $a$  et  $\alpha$  sont tous deux positifs ou tous deux négatifs, c'est-à-dire pour les fibres extérieures quand l'armage est positif et pour les fibres intérieures quand l'armage est négatif.

Il est facile d'imaginer les deux cas où l'allongement est négatif, c'est-à-dire où il y a raccourcissement.

Dans le barillet, le ressort est accroché par une de ses extrémités à la bonde, par l'autre au tambour du barillet. Pendant le remontage (armage positif), l'extrémité fixe du ressort (A dans la figure 41) est le

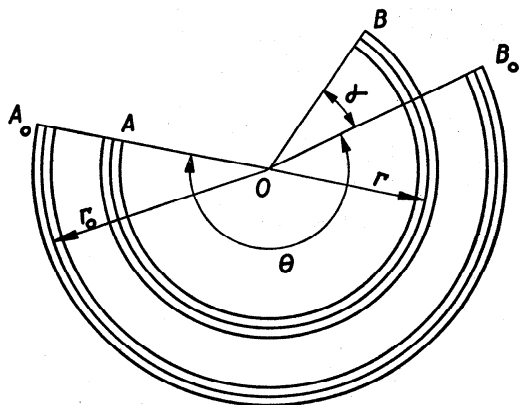


Fig. 41

point d'attache au tambour ; pendant la détente (armage négatif), c'est le point d'attache à la bonde qui est fixe.

Les spires d'un ressort enroulé dans un barillet ne sont pas circulaires comme nous l'avons supposé dans les calculs précédents. Lorsque le ressort est complètement tendu, les spires sont appuyées les unes contre les autres et le ressort a à peu près la forme d'une spirale d'Archimède ou d'une développante de cercle. Pendant la détente, les spires s'écartent les unes des autres tout en restant à peu près concentriques à l'axe du barillet. Ce développement concentrique n'est pas obtenu sans l'emploi de certains artifices dont nous parlerons plus loin.

Nous pouvons considérer le ressort dans le barillet comme formé d'une grande quantité de lames circulaires très courtes et dont les rayons augmentent insensiblement. Puisque l'allongement des fibres ne dépend pas du rayon, nous pourrions appliquer au ressort dans le barillet les formules déduites pour le ressort de forme circulaire.

La fibre située à la distance  $a$  du plan neutre a subi, du fait de l'armage  $\alpha$ , l'allongement :

$$\Delta L_a = \alpha a.$$

Pour obtenir un tel allongement, il faut appliquer une force :

$$dP_a = \frac{\Delta L_a}{L_a} dS \cdot E = \frac{\alpha a E}{L_a} dS.$$

Dans cette formule,  $dS$  désigne la section droite infiniment petite de la fibre et  $E$  le module d'Young.

La fibre allongée tend à reprendre sa longueur primitive avec la même force  $dP_a$ .

Pour raccourcir la fibre intérieure symétrique à la fibre extérieure que nous venons de considérer, il faut une force  $dP_{-a}$  que nous obtenons en remplaçant  $a$  par  $-a$  dans la formule qui donne la valeur de  $dP_a$  :

$$dP_{-a} = -\frac{\alpha a E}{L_a} dS.$$

Ces deux forces  $dP_a$  et  $dP_{-a}$  ont par rapport à l'axe du barillet des moments  $dM_a$  et  $dM_{-a}$  qui valent :

$$dM_a = \frac{\alpha a E}{L_a} dS \cdot (r + a),$$

$$dM_{-a} = -\frac{\alpha a E}{L_a} dS \cdot (r - a),$$

et dont la somme est :

$$dM = \frac{2a^2 aE}{L_a} dS.$$

Nous pouvons considérer les fibres comme ayant toutes la même longueur  $L$ , ce qui donne :

$$dM = \frac{2aE}{L} a^2 dS.$$

Pour avoir le moment global, il suffit d'intégrer entre les limites  $a = 0$  et  $a = +\frac{e}{2}$ ,  $e$  représentant l'épaisseur du ressort. Nous avons :

$$M = \frac{2aE}{L} \int_0^{+\frac{e}{2}} a^2 dS.$$

Si nous appelons *moment d'inertie*  $I$  de la surface  $S$  par rapport au plan des fibres neutres la grandeur :

$$2 \int_0^{+\frac{e}{2}} a^2 dS,$$

nous aurons la formule générale donnant le *moment élastique* d'un ressort armé de l'angle  $\alpha$  radians, de longueur  $L$ , de section  $S$ , d'épaisseur  $e$  et dont le module de traction est  $E$  :

$$\underline{\underline{M = \frac{aE}{L} I.}} \quad (5)$$

**Moment d'inertie d'une surface.** — Le moment d'inertie d'une surface plane  $S$  (fig. 42) par rapport à un axe  $AB$  situé dans son plan est la somme des produits obtenus en multipliant l'aire  $dS$  de chaque élément de surface par le carré de sa distance  $a$  à l'axe :

$$I = \sum a^2 dS = \int a^2 dS.$$

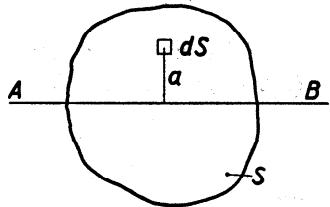


Fig. 42

Le moment d'inertie, représenté par une somme de termes dont chacun est le produit du carré d'une longueur par une surface, a pour

dimensions la quatrième puissance d'une longueur :  $[I] = L^4$ . Il s'exprimera donc en  $\text{cm}^4$ ,  $\text{mm}^4$ , ..., suivant l'unité de longueur adoptée.

Pour avoir la valeur de  $I$ , il faut intégrer entre les limites convenables. Si l'axe  $AB$  est un axe de symétrie, le moment d'inertie d'une moitié de la figure est égal à celui de l'autre ; si  $I'$  est ce moment, nous aurons  $I = 2 I'$ . C'est ainsi que nous avons défini le moment d'inertie  $I$  par la formule :

$$I = 2 \int a^2 dS,$$

mais nous avons intégré entre d'autres limites. Nous verrions aisément que :

$$2 \int_0^{+\frac{e}{2}} a^2 dS = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} a^2 dS.$$

Nous pouvons calculer le moment d'inertie par rapport à des axes quelconques choisis dans le plan de la surface. Nous aurons pour l'expression des moments d'inertie par rapport aux axes  $Ox$  et  $Oy$  (fig. 43) :

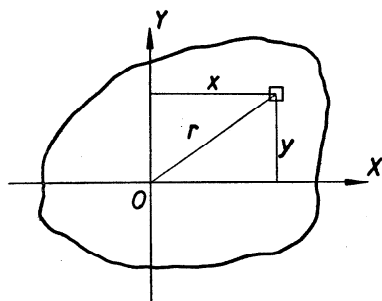


Fig. 43

$$I_x = \int y^2 dS, \quad I_y = \int x^2 dS.$$

Il y a parfois intérêt à calculer le *moment d'inertie polaire*  $I_o$  de la surface  $S$  par rapport à un point  $O$  situé dans son plan ; c'est la somme des produits obtenus en multipliant  $dS$  par le carré de la distance  $r$  de cet élément au point  $O$  :

$$I_o = \sum r^2 dS = \int r^2 dS.$$

Faisons passer par le point  $O$  deux axes rectangulaires  $Ox$  et  $Oy$  (fig. 43) ; le moment d'inertie par rapport à ce point a pour valeur :

$$I_o = \int r^2 dS = \int (x^2 + y^2) dS = \int x^2 dS + \int y^2 dS$$

ou

$$\underline{\underline{I_o = I_x + I_y,}} \quad (6)$$

ce qui permet de dire : le *moment d'inertie polaire d'une surface plane est égal à la somme des moments d'inertie de la surface par rapport à deux axes rectangulaires quelconques passant par le pôle.*

**Moment d'inertie d'un rectangle.** — Soit le rectangle  $ABCD$  (fig. 44) qui peut être la section droite d'un ressort. Pour connaître le moment élastique  $M$  du ressort, nous devons calculer le moment d'inertie du rectangle par rapport à l'axe  $OO$  des fibres neutres.

A cet effet, décomposons le rectangle en bandes infiniment minces parallèles à l'axe  $OO$ . Une bande d'aire  $dS = hda$  est à la distance  $a$  de l'axe  $OO$ . Nous avons :

$$I = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} a^2 dS = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} a^2 \cdot h da = h \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} a^2 da,$$

soit :

$$I = h \left[ \frac{a^3}{3} \right]_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} = \frac{he^3}{12}. \quad (7)$$

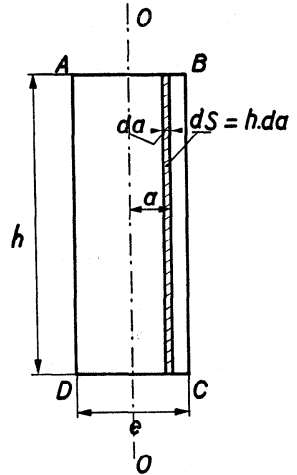


Fig. 44

Le moment élastique  $M$  correspondant à un armage de  $\alpha$  radians est, d'après l'équation (5) :

$$M = \frac{\alpha E}{L} I,$$

donc :

$$\underline{\underline{M = \frac{E e^3 h}{12 L} \alpha.}} \quad (8)$$

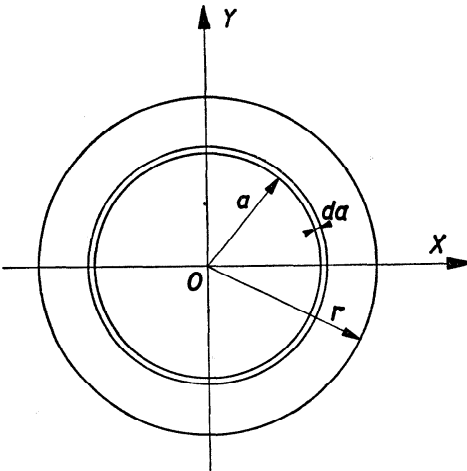


Fig. 45

**Moment d'inertie d'un cercle.** —

Si la section droite du ressort est circulaire, nous devons, pour calculer le moment élastique, évaluer le moment d'inertie de la surface d'un cercle par rapport à un diamètre. Pour des raisons de symétrie, le moment d'inertie du cercle est toujours le même quel que soit le diamètre de référence. Ainsi

nous aurons (fig. 45), pour le cercle de centre  $O$  et de rayon  $r$  :

$$I_x = I_y.$$

Découpons la surface du cercle en anneaux circulaires infiniment minces et calculons d'abord le moment d'inertie polaire par rapport au centre  $O$  :

$$I_o = \int_0^r a^2 dS = \int_0^r a^2 \cdot 2\pi a da = 2\pi \int_0^r a^3 da ,$$

$$I_o = 2\pi \left[ \frac{a^4}{4} \right]_0^r = \frac{\pi r^4}{2} .$$

Mais d'après (6) :

$$I_o = I_x + I_y = 2I_x ,$$

d'où :

$$I_x = \frac{I_o}{2} .$$

Donc :

$$I_x = \frac{\pi r^4}{4} . \quad (9)$$

Le moment élastique  $M$  d'un ressort de section circulaire, armé d'un angle  $\alpha$  radians et dont l'axe neutre de la section est  $Ox$ , a pour valeur :

$$M = \frac{\alpha E}{L} I_x$$

ou

$$\underline{\underline{M = \frac{E\pi r^4}{4L} \alpha .}} \quad (10)$$

**Section rectangulaire à bouts arrondis.** — Dans la pratique, la section droite des ressorts est rarement rectangulaire ; les bouts sont généralement arrondis. Supposons que la section d'un ressort soit un rectangle terminé par deux demi-cercles (fig. 46) ; la longueur du rectangle est  $l$ , sa

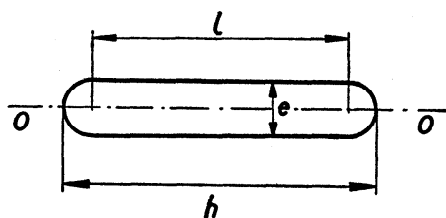


Fig. 46

largeur est  $e$ . Calculons le moment d'inertie de la surface par rapport à l'axe neutre  $OO$  ; il se compose des moments d'inertie du rectangle et des demi-cercles. Le moment d'inertie du rectangle est :

$$\frac{le^3}{12} ,$$



celui des deux demi-cercles :

$$\frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi e^4}{64},$$

d'où :

$$I = \frac{le^3}{12} + \frac{\pi e^4}{64} = \frac{e^3}{4} \left( \frac{l}{3} + \frac{\pi e}{16} \right).$$

Comme  $l = h - e$ , nous aurons finalement :

$$I = \frac{e^3}{4} \left( \frac{h - e}{3} + \frac{\pi e}{16} \right). \quad (11)$$

Le moment élastique  $M$  d'un ressort à section rectangulaire à bouts arrondis est, pour un armage de  $\alpha$  radians :

$$M = \frac{\alpha E}{L} I,$$

soit :

$$M = \frac{E e^3}{4 L} \left( \frac{h - e}{3} + \frac{\pi e}{16} \right) \alpha. \quad (12)$$

En traitant un ressort à bouts arrondis comme si la section était rectangulaire, nous commettrions une erreur facile à calculer et qui est, pour  $I$  :

$$0,034 e^4$$

et, pour  $M$  :

$$\frac{\alpha E}{L} \cdot 0,034 e^4.$$

Il est légitime d'utiliser les formules (11) et (12) pour les spiraux. Pour les ressorts de barillet, il est difficile d'admettre une forme déterminée ; les valeurs exactes de  $I$  sont entre celles qui sont données par les formules (7) et (11).

De toutes façons, il faut, avant d'employer une formule plus simple mais approximative, se rendre compte de l'ordre de grandeur de l'erreur commise.

**Le moment élastique exprimé en fonction du nombre de tours.** — L'état de tension du ressort moteur est indiqué par son nombre de tours. Il y a lieu de distinguer différents angles ou différents nombres de tours qui correspondent à trois états du ressort ; celui-ci peut être complètement détendu hors du barillet, détendu dans le barillet ou enroulé autour de la bonde, c'est-à-dire complètement armé.

L'enroulement permanent est le nombre de tours du ressort complètement détendu hors du barillet et posé par exemple sur une table ; nous le désignerons par  $N_0$ .

L'enroulement total correspond à l'état du ressort enroulé autour de la bonde ; nous l'appellerons  $N''$ .

Enfin nous désignerons par  $N'$  l'enroulement du ressort désarmé dans le barillet.

Le développement initial est l'angle dont le ressort se déroule lorsqu'il est sorti du barillet ; exprimé en radians et en fonction du nombre de tours, cet angle est égal à :

$$2\pi (N' - N_0) .$$

Le développement disponible est l'angle maximum dont le ressort peut se développer dans le barillet ; il vaut en radians :

$$2\pi (N'' - N') .$$

Lorsque le ressort est appuyé contre le tambour du barillet, son moment n'est pas nul, car celui-ci est égal, dans le cas d'un ressort à section rectangulaire ( $h$ ,  $e$ ), à :

$$M_1 = \frac{Ee^3h}{12L} \cdot 2\pi (N' - N_0) .$$

Lorsque le ressort est enroulé autour de la bonde, c'est-à-dire complètement armé, son moment ou couple est :

$$M = \frac{Ee^3h}{12L} \cdot 2\pi (N'' - N_0) . \quad (13)$$

Pendant que la montre marche, le ressort se détend ; son moment décroît et passe de sa valeur maximum  $M$  à sa valeur minimum  $M_1$ . Le moment n'est jamais égal à zéro, mais lorsqu'il a atteint la valeur  $M_1$ , le ressort est appuyé contre le tambour et ne peut plus se détendre ; la force qu'il exerce n'est pas nulle, mais comme le ressort est immobilisé, la force ne peut produire aucun travail : son énergie disponible est nulle.

Dans l'expression du moment élastique du ressort, les angles sont exprimés en radians ; nous transformons un nombre de tours en radians en nous rappelant que l'angle de  $360^\circ$  est égal à 1 tour ou à  $2\pi$  radians. Donc :

$$N \text{ tours} = 2\pi N \text{ radians} .$$

Quand le ressort est complètement armé dans le barillet, son moment est donné par la formule (13) ; lorsqu'il est détendu de 1 tour, son moment est devenu :

$$\frac{Ee^3h}{12L} \cdot 2\pi [(N'' - 1) - N_0] ;$$

détendu de 2 tours, il devient :

$$\frac{Ec^3h}{12L} \cdot 2\pi [(N'' - 2) - N_0]$$

et ainsi de suite...

Le moment élastique d'un ressort est une fonction linéaire de l'angle d'armage ou du nombre de tours ; cette fonction est représentée graphiquement par une droite.

**Détermination expérimentale du moment élastique.** — On peut déterminer facilement le moment d'un ressort de barillet pour un état quelconque de tension ; il suffit d'utiliser un levier  $AB$  (fig. 47) divisé en mm ; il peut être fixé au moyen de la vis  $C$  sur le carré  $O$  de l'arbre de barillet. En tournant le levier tout en maintenant le barillet fixe, on enroule le ressort autour de la bonde : on arme le ressort.

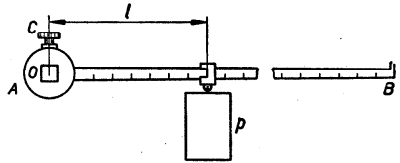


Fig. 47

Pour connaître le moment du ressort correspondant à un certain armage, on suspend un poids  $p$  à la tige  $AB$  et on le déplace le long de celle-ci jusqu'à ce que le ressort reste tendu sans pouvoir faire tourner la tige. A cet instant, le moment de la force  $p$  par rapport à  $O$  est égal au moment du ressort :

$$M = pl.$$

Si  $p$  est exprimé en  $g^*$ ,  $l$  en mm,  $M$  sera un nombre de  $g^*$ -mm. C'est l'unité de moment la plus courante en horlogerie. Si nous travaillons dans le système C.G.S.,  $p$  est en dynes,  $l$  en cm et le moment  $M$  en dynes-cm. Le passage d'une unité à l'autre est facile ; on a :

$$\begin{aligned} 1 \text{ } g^*\text{-mm} &= 98,1 \text{ dynes-cm,} \\ 1 \text{ dyne-cm} &= 0,0102 \text{ } g^*\text{-mm.} \end{aligned}$$

La formule  $M = pl$  n'est exacte que si le levier  $AB$  est équilibré. S'il n'en était pas ainsi, il faudrait tenir compte du moment du levier par rapport à  $O$ , moment que l'on détermine une fois pour toutes et qui est une constante  $K$ . La formule modifiée est :

$$M = pl + K.$$

On peut aussi utiliser une méthode dynamique, celle de Gauss, par exemple, qui consiste à déterminer la période d'un pendule ou d'un balancier oscillant sous l'influence du ressort agissant comme un spiral

de montre. L'appareil qui permet d'effectuer cette détermination sera décrit, et les formules qui s'y rattachent établies, lorsqu'on parlera du moment élastique du spiral.

Les méthodes dynamiques permettent généralement d'obtenir une plus grande précision.

**Le dynamomètre.** — Les appareils appelés *dynamomètres* donnent un diagramme indiquant la variation du moment du ressort de barillet en fonction de l'enroulement. Il y a plusieurs types de dynamomètres ; nous en décrirons un, celui de G.-A. Berner, construit à l'Ecole d'horlogerie de Bienne et qui a deux qualités précieuses : il permet de mesurer des ressorts très faibles comme ceux qui sont utilisés dans les montres-bracelet, ensuite il indique le nombre de tours réellement exécutés par le ressort.

Il se compose d'un tambour cylindrique auquel est fixé la feuille de papier sur laquelle sera dessiné le diagramme du moment du ressort en fonction de l'angle d'armage. Le tambour peut être mû par une manivelle *T* (pl. II, fig. 48).

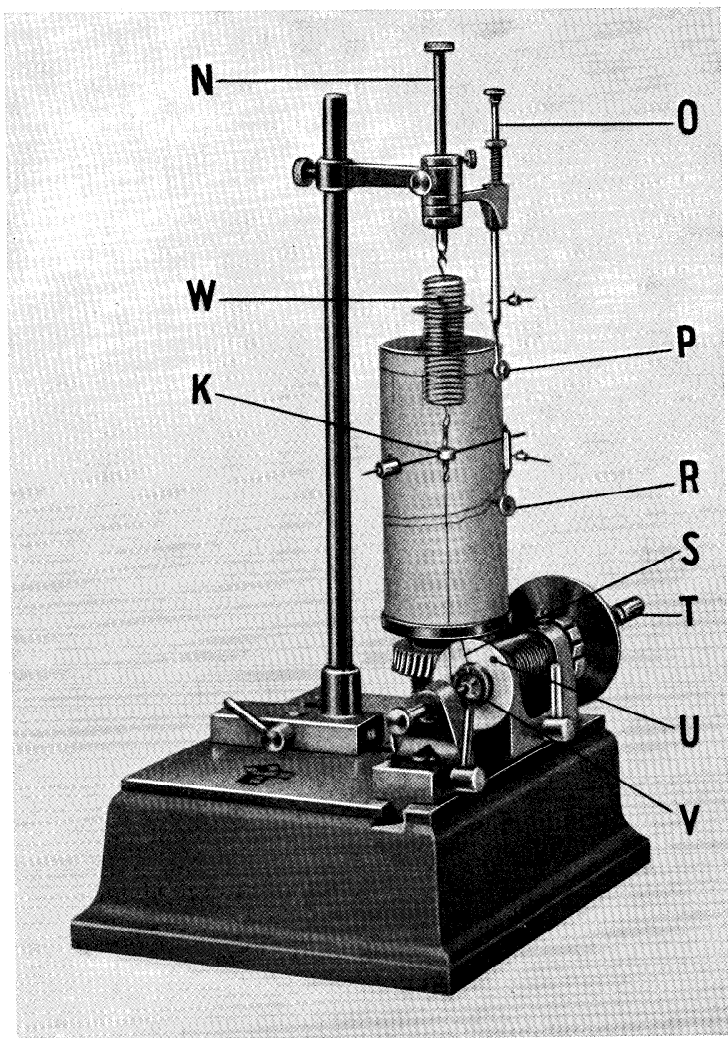
Le ressort à mesurer est fixé dans la bague *V* reliée par un fil très fin au ressort étalon *W* par l'intermédiaire d'une douille *K* portant deux leviers équilibrés dont l'un porte un contrepoids mobile, l'autre, la plume enregistreuse *R*.

Le ressort étalon est suspendu à la tige mobile *N*. Une seconde plume *P* est suspendue à la tige mobile *O*. En appuyant sur *O*, la plume *P* trace un trait longitudinal ; cette opération est faite chaque fois que l'armage du ressort s'est réellement modifié d'un tour. Le nombre de tours de la manivelle *T* n'est pas le nombre de tours dont le ressort a été armé (ou désarmé) dans le barillet *V*, car le ressort se désarme d'une certaine quantité au fur et à mesure que le ressort étalon *W* s'allonge.

Pour obvier à cet inconvénient, la bague *V* est munie d'une aiguille *S* qui se déplace devant un cadran muni d'un repère *U*. Ce cadran est ajusté à frottement doux sur l'arbre de la manivelle qui entraîne l'arbre de barillet. Au début de l'opération, le ressort étant désarmé, le cadran est tourné de façon que *U* se trouve en face de l'aiguille *S*. La manivelle est ensuite tournée de 1 tour plus une certaine fraction jusqu'à ce que *U* se trouve de nouveau en face de *S*. A ce moment, le ressort a été armé exactement d'un tour. Pressons sur la tige *O* : la plume *P* marque un trait.

Le ressort étalon *W* et la plume *R* sont entièrement libres ; le seul frottement qui intervient est celui de la plume contre le papier. La force du ressort étalon doit être proportionnée à celle du ressort à mesurer ; il faut donc avoir une série de ressorts étalonnés avec soin.

La plume décrit une courbe, le diagramme, dont nous parlerons en



Pl. II, fig. 48



détail; chaque point de la courbe est déterminé par deux coordonnées  $x$  et  $y$  dont les valeurs sont reliées au degré d'armage du ressort par des équations faciles à déduire de la figure schématique 49.

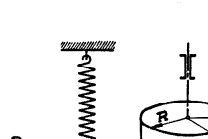
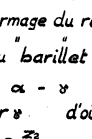
| Ecole d'horlogerie  | Dynamomètre<br><i>Particularité.</i>   | Bienne .  |
|---|--|---|
|  | <p> <math>\alpha</math> = degré d'armage du ressort en radian.<br/> <math>A_t</math> = " " " " " tours " "<br/> <math>r</math> = rayon du barillet . (bras de levier)         </p> <p> <math>\alpha = \alpha - \gamma</math><br/> <math>\gamma = r \varphi</math> d'où <math>\varphi = \frac{\gamma}{r}</math><br/> <math>\alpha = \rho \frac{Z_2}{Z_1}</math><br/> <math>\alpha = \rho \frac{Z_2}{Z_1} - \frac{\gamma}{r}</math> (1)<br/> <math>x = R \rho</math> d'où <math>\rho = \frac{x}{R}</math><br/> <math>\alpha = \frac{x}{R} \frac{Z_2}{Z_1} - \frac{\gamma}{r}</math><br/> <math>A_t = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{x}{R} \frac{Z_2}{Z_1} - \frac{\gamma}{r} \right)</math> (2)<br/> <math>x = R \frac{Z_2}{Z_1} \left( 2\pi A_t + \frac{\gamma}{r} \right)</math> (3)         </p> <p> <i>Dynamomètre Ecole :</i><br/> <math>R = 26,20 \text{ mm}</math>    <math>\frac{Z_2}{Z_1} = 10</math> ou 12         </p> |  |
| 515   | 12.VI.47   | Ph.   |

Fig. 49

L'angle d'armage du ressort, exprimé en radians, est égal à la différence des angles  $\alpha$  et  $\gamma$  qui sont, exprimés en radians, les angles de rotation de la manivelle et du tambour :  $a = \alpha - \gamma$ . Nous voyons que :

$$x = R\beta, \quad y = r\gamma, \quad a = \beta \frac{z_2}{z_1}.$$

Exprimons l'angle d'armage  $a$  en fonction de  $x$  et de  $y$ ; nous trouvons :

$$a = \frac{x}{R} \frac{z_2}{z_1} - \frac{y}{r}.$$

L'expression  $\frac{z_2}{Rz_1} = K$  est une constante pour un appareil donné. Nous avons donc :

$$a = Kx - \frac{y}{r}. \quad (14)$$

Cette équation montre que l'angle d'armage n'est pas proportionnel à  $x$ . Mais nous avons, avec la plume  $P$  (fig. 48), un moyen pratique de marquer sur l'axe des  $x$  les vraies valeurs de  $a$ .

Nous avons admis que le ressort de barillet obéit à la loi de Hooke : son moment est proportionnel à l'angle d'armage  $\alpha$ . Dans le diagramme, le moment du ressort est représenté par l'ordonnée  $y$ . Nous pouvons poser :

$$y = n\alpha,$$

en considérant que  $n$  est une constante. Alors :

$$\alpha = \frac{y}{n}.$$

La formule (14) devient :

$$\frac{y}{n} = Kx - \frac{y}{r},$$

d'où nous tirons :

$$y = \frac{K}{\frac{1}{n} + \frac{1}{r}} x. \quad (15)$$

Bien que l'angle d'armage  $\alpha$  ne soit pas proportionnel à  $x$ , la relation entre les coordonnées  $x$  et  $y$  est linéaire ; l'équation (15) peut être représentée par une droite.

**Le diagramme du ressort.** — La plume  $R$  (fig. 48) dessine sur le papier enroulé sur le tambour une figure dans le genre de celle qui est représentée par la figure 50 ; cette figure se compose de deux courbes  $OAB$  et  $CDO$

relées par un segment rectiligne  $BC$ . Chaque point de ces courbes est caractérisé par ses coordonnées, dont l'une,  $x$ , est reliée au degré d'armage du ressort par la relation (14), tandis que l'autre,  $y$ , qui est l'allongement du ressort étalon  $W$ , est proportionnelle à la force exercée par le ressort sur le tambour du barillet  $V$ .

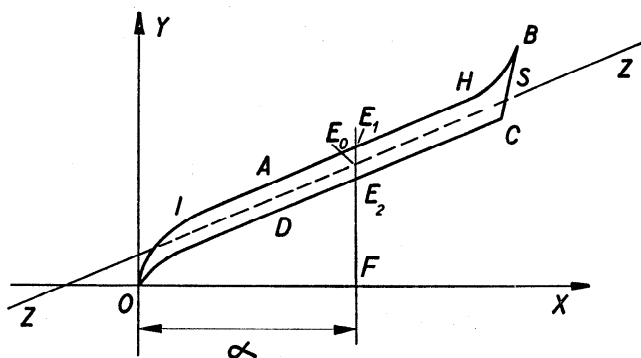


Fig. 50

La courbe  $OAB$  est tracée pendant l'armage du ressort ; le point  $B$  correspond à l'armage maximum. Dès que le ressort est complètement tendu, on le laisse se détendre dans le barillet. Aussitôt qu'on ne



presse plus sur la manivelle  $T$  (fig. 48), l'aiguille enregistreuse passe brusquement de  $B$  en  $C$  puis, au fur et à mesure que le ressort de barillet se détend, elle décrit la courbe  $CDO$ .

Les abscisses des points des courbes du diagramme proviennent de la rotation du tambour qui est une fonction du degré d'armage du ressort ainsi que le montre la formule (14). Les ordonnées indiquent l'extension du ressort étalon  $W$ , c'est-à-dire la force exercée par le ressort de barillet sur le fil attaché au tambour de  $V$ . Pour exprimer cette force, il est nécessaire de connaître le ressort étalon  $W$  et de savoir comment il réagit quand il est sollicité par une force connue; il faut l'étalonner soigneusement, de façon à savoir qu'une extension du ressort de 1 mm correspond à une traction de tant de grammes. On peut admettre que la force de traction et l'extension du ressort sont proportionnelles et obéissent à la loi de Hooke tant que les déformations restent élastiques, ce qu'on vérifie par le retour à la charge zéro.

Les ordonnées indiquent une force  $f$  qui est proportionnelle au moment  $M$  du ressort, puisque  $M = fr$  si  $r$  est le rayon du tambour sur lequel est enroulé le fil.

On peut donc considérer l'ordonnée d'un point quelconque d'une des courbes du diagramme comme une mesure du moment élastique du ressort correspondant à l'armage indiqué par l'abscisse du même point.

Mais la formule  $M = fr$  montre que le moment dépend du rayon de la bague  $V$ . Dès que l'on change de bague, on modifie le rapport de  $M$  à  $f$ ; on doit alors changer l'échelle des ordonnées.

En examinant le diagramme (fig. 50), on est étonné de voir que les moments du ressort ne sont pas proportionnels au degré d'armage, puisque  $OAB$  et  $CDO$  sont des courbes et non des droites. Or, on a la formule (5) :

$$M = \frac{\alpha E}{L} I,$$

dans laquelle  $E$ ,  $L$  et  $I$  sont des constantes pour un ressort donné. D'où provient ce désaccord entre le diagramme et la formule?

La courbe d'armage du ressort se compose généralement de trois tronçons :  $OI$ ,  $IH$  et  $HB$  (fig. 50). Le premier tronçon  $OI$  est plus incliné que le second  $IH$ . Au commencement de l'armage, le ressort est détendu dans le barillet; sa spire extérieure est appuyée contre la paroi intérieure du tambour et le ressort ne peut se détendre davantage; il n'exerce plus aucune force; son énergie potentielle n'est pourtant pas nulle puisque, si l'on supprimait le tambour du barillet, le ressort se détendrait de l'angle de développement initial. Au fur et à mesure que l'on tend le ressort, la spire extérieure abandonne la paroi du tambour et le ressort devient

de plus en plus libre. Son moment de force augmente très rapidement jusqu'à ce qu'il corresponde à l'angle d'armage du ressort désarmé dans le barillet, c'est-à-dire au développement initial. Quand la spire extérieure a complètement abandonné la paroi du tambour, le moment du ressort augmente proportionnellement à l'angle d'armage; c'est la partie *IH* qui est à peu près droite, mais moins inclinée que *OI*. A la fin du remontage, le ressort perd de nouveau sa liberté; les spires intérieures sont fortement serrées les unes contre les autres; le frottement est considérable de sorte que la force nécessaire au remontage augmente assez brusquement. Cette augmentation de frottement se manifeste dans la partie *HB* de la courbe d'armage de nouveau plus inclinée que le tronçon *IH*.

La droite *zz* (fig. 50) correspond à la formule (5); elle doit couper l'axe *Ox* en un point dont l'abscisse est égale au développement initial.

Si la courbe *OIAHB* ne se confond pas, même dans le tronçon *IH*, avec la droite *zz*, cela provient des résistances supplémentaires qu'il faut vaincre pour armer le ressort. Ces résistances sont des frottements :

frottement des spires entre elles, qui est particulièrement grand vers la fin de l'armage;

frottement des pivots de l'arbre de barillet pressés contre les parois des trous;

frottement intérieur des molécules les unes contre les autres pendant la déformation du ressort;

frottement de la lame du ressort contre le fond et contre le couvercle du barillet.

La somme des moments des forces de frottement n'est probablement pas proportionnelle à l'angle d'armage.

Pendant l'armage, on doit faire un effort supplémentaire pour vaincre ces résistances; or on enregistre la force avec laquelle on tourne la manivelle *T*. Si l'on considère les moments et qu'on désigne par  $M_f$  la somme des moments des résistances par rapport à l'axe du barillet, on constate qu'on a enregistré :

$$M + M_f.$$

Pendant la détente, les résistances s'opposent au développement du ressort; son moment est diminué de celui des résistances. On a enregistré :

$$M - M_f.$$

On ne saurait être surpris que la courbe d'armage *OAB* soit toujours au-dessus de la courbe de détente *CDO*, puisque les ordonnées de la première sont proportionnelles à  $M + M_f$ , tandis que celles de la seconde sont proportionnelles à  $M - M_f$ .

Pour un angle d'armage  $\alpha$ , nous avons sur l'axe  $Ox$  un point  $F$  (fig. 50) dont la distance  $OF$  est l'abscisse des points  $E_1$  et  $E_2$ . Donc :

$$FE_1 = M + M_f, \quad FE_2 = M - M_f,$$

d'où :

$$E_2E_1 = FE_1 - FE_2 = (M + M_f) - (M - M_f) = 2M_f.$$

Ainsi aucune des courbes ne représente l'évolution véritable du moment du ressort ; ce moment serait donné par la courbe intermédiaire pointillée de la figure 50. En effet :

$$\frac{FE_1 + FE_2}{2} = FE_0 = \frac{(M + M_f) + (M - M_f)}{2} = M.$$

**Le rendement du ressort.** — Pour apprécier la qualité d'un ressort, on évalue son *rendement* qui est le rapport entre la force (ou le moment) à la détente et la force (ou le moment) au remontage du ressort armé d'un certain angle  $\alpha$ . Ces valeurs peuvent être déduites du diagramme. On obtient ainsi pour n'importe quel angle  $\alpha$  un *rendement instantané*. Le *rendement global* est la moyenne des rendements instantanés. Par exemple dans le diagramme de la figure 51, les angles d'armage correspondent aux abscisses  $OL, OM, ON, OP, OQ$ , et on obtient les rendements instantanés :

$$\eta_1 = \frac{LD}{LA}, \quad \eta_2 = \frac{MF}{ME}, \quad \eta_3 = \frac{NH}{NG}, \quad \eta_4 = \frac{PK}{PI}, \quad \eta_5 = \frac{QC}{QB'};$$

ces rendements sont exprimés en fractions décimales. Si  $LD = 650 \text{ g}^*$  et  $LA = 700 \text{ g}^*$ , on a :

$$\eta_1 = \frac{650}{700} = 0,93 \text{ ou } 93\%.$$

Le rendement global peut être exprimé approximativement par la fraction :

$$\eta = \frac{LD + MF + NH + PK + QC}{LA + ME + NG + PI + QB'}$$

qui est le quotient de la force moyenne à la détente :

$$\frac{LD + MF + NH + PK + QC}{5}$$

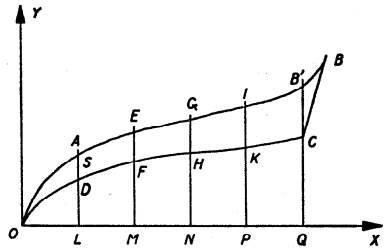


Fig. 51

par la force moyenne à l'armage :

$$\frac{LA + ME + NG + PI + QB'}{5}.$$

Il va sans dire que la valeur de  $\eta$  sera d'autant plus exacte que le nombre de points du diagramme considérés sera plus élevé.

Un coup d'œil sur les courbes permet d'évaluer approximativement le rendement, c'est-à-dire la qualité du ressort ; il suffit d'examiner la surface  $OABGDO$  : plus elle est grande, plus le rendement est faible, plus le ressort est mauvais.

Ce qu'on a évalué en posant :

$$\eta_1 = \frac{LD}{LA}$$

n'est, en réalité, pas le rendement vrai. Il aurait mieux valu poser :

$$\eta_1 = \frac{LD}{LS},$$

puisque  $LS$  représente le moment vrai du ressort. Mais cela obligerait à tracer une troisième courbe sur le diagramme. Or, ici, il s'agit de mesures relatives permettant d'évaluer la qualité d'un ressort ; elles sont suffisantes si on utilise les deux courbes tracées par la plume du dynamomètre.

**Les facteurs qui influencent le rendement d'un ressort.** — Les ressorts de barillet sont généralement en acier trempé et revenu, parfois en alliages inoxydables contenant des matières durcissantes telles que le tungstène, le molybdène, le glucinium ou le cobalt.

L'acier doit être de première qualité, de texture très fine. Les traitements mécaniques : laminage, adoucissage, polissage, estrapadage ont une grande importance et doivent être exécutés avec le plus grand soin ; il en est de même des traitements thermiques : recuit, trempe, revenu, étuvage.

Le polissage des lames du ressort diminue le frottement entre les spires ; il réduit la différence entre les valeurs de la force correspondant à l'armage et au désarmage ; il augmente donc le rendement. Non seulement le plat, mais aussi les bords arrondis des lames, qui frottent parfois contre le fond ou contre le couvercle du barillet, doivent être polis. Pour diminuer ce dernier frottement, il est important que le fond du barillet et le couvercle soient tournés proprement.

Pour atténuer le frottement des spires les unes contre les autres,

on lubrifie le ressort en passant la lame dans un papier gras et en mettant quelques gouttes d'huile sur le dessus du ressort lorsque les spires sont serrées. L'emploi de graisse au lieu d'huile s'est révélé favorable (P. Berner. *Bulletin de la S.S.C.*, 1938) même pour les ressorts faibles. Les diagrammes de la figure 52 montrent nettement l'influence du graissage.

Si le barillet n'est pas libre sur l'arbre, le frottement de ces deux pièces absorbe une partie de la force du ressort. Le frottement de l'arbre dans le barillet est considérablement augmenté lorsque le ressort ne se développe pas concentriquement à l'arbre ; les spires sont alors jetées de côté et exercent une forte pression latérale sur l'arbre ; le frottement qui en résulte se traduit, à l'armage, par une augmentation de la force nécessaire pour faire tourner l'arbre et, à la détente, par une diminution de la force du ressort. Le développement concentrique du ressort dans le barillet est donc très important pour le rendement du ressort, mais on ne peut l'obtenir qu'en utilisant certains artifices dont nous parlerons bientôt.

Les « très bons » ressorts ont un rendement qui va de 90 à 95 % ; ceux dont le rendement se situe entre 75 et 90 % peuvent être qualifiés de « bons », tandis que les ressorts médiocres ou mauvais ont un rendement inférieur à 75 %.

Si l'on ne parvient pas à améliorer un mauvais ressort, il faut renoncer à l'utiliser.

**Supériorité de la méthode expérimentale.** — Ce que nous venons de dire montre les avantages du diagramme enregistré sur un dynamomètre. L'enregistrement tient compte des résistances que nous sommes obligés de négliger dans les calculs. Nous avons calculé le moment élastique du ressort de barillet en ignorant tout simplement le frottement intérieur, le frottement des lames entre elles et contre le barillet et le frottement de l'arbre. Or, ces forces agissent même si nous sommes incapables de les calculer avec précision. Nous verrons plus loin que les frottements sont des résistances variables qui échappent plus ou moins au calcul ; il est possible de les y incorporer en admettant des coefficients qui, comme chacun le sait, devraient être déterminés dans chaque cas particulier.

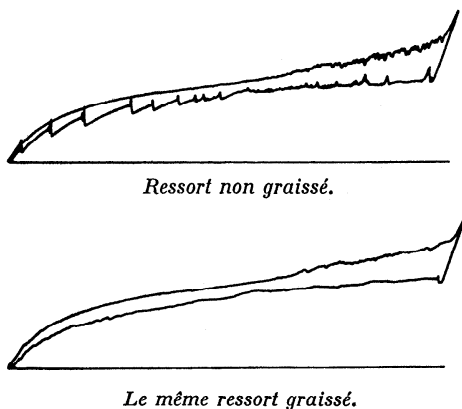


Fig. 52

Le moment élastique d'un ressort de section rectangulaire est :

$$M = \frac{Ee^3h}{12L} \alpha,$$

lorsque celui-ci est armé d'un angle de  $\alpha$  radians.

Il n'est pas aisé de déterminer  $E$ , le module d'Young, aussi ne prend-on pas généralement la peine de le mesurer ; on l'admet d'après des tables publiées dans certains recueils. Or, dans ces tables, le module de traction, pour l'acier par exemple, varie de 19 000 à 23 000 kg\*/mm<sup>2</sup>, soit de plus de 20%.

Les dimensions du ressort doivent être mesurées avec précision ; si une petite erreur sur la valeur de  $L$  n'a pas grande influence sur la valeur du moment élastique, il n'en est pas de même pour la même erreur absolue sur la hauteur de la lame ou sur son épaisseur qui intervient au cube. Et nous admettons tacitement que les dimensions  $e$  et  $h$  sont les mêmes tout au long de la lame.

Les erreurs qui résultent de l'incertitude des valeurs attribuées à  $E$ ,  $L$ ,  $e$ ,  $h$  n'apparaissent pas dans le diagramme du dynamomètre.

Nous n'allons pas jusqu'à dire que le dynamomètre est un appareil parfait ; il a des défauts qui résultent de sa conception et de sa construction. Mais c'est un instrument précieux pour celui qui se donne la peine de l'étudier afin d'en connaître les qualités et les insuffisances.

Le dynamomètre enregistre la force du ressort telle qu'elle se manifeste. Au moyen de ces enregistrements, on peut se rendre compte de l'influence de la matière, de la forme et des dimensions du ressort, du lubrifiant ou de certains dispositifs tels que les brides.

**Examen du diagramme.** — Nous savons pourquoi les portions  $OAB$  et  $CDO$  (fig. 50) ne sont pas des droites et pourquoi  $OAB$  est toujours situé au-dessus de  $CDO$ .

Dans les diagrammes réels,  $OAB$  et  $CDO$  sont rarement des courbes régulières ; elles ont souvent des bosses, des creux, de brusques changements de direction. Toutes ces irrégularités ont une cause qu'il faut s'efforcer de découvrir.

Ce que nous déplorons le plus dans l'action du ressort, c'est son irrégularité. Nous ne pouvons pas espérer la faire disparaître puisque la force d'un ressort et son moment élastique sont proportionnels à l'angle d'armage ; or, cet angle diminue au fur et à mesure que la montre marche. L'énergie transmise au balancier à travers le rouage et l'échappement variant de façon constante, le balancier reçoit des impulsions d'intensité décroissante et l'amplitude des oscillations diminue.

Si nous ne pouvons pas rendre constant le moment élastique du ressort, nous pouvons diminuer sa variation, du moins pendant le temps durant lequel il travaille dans la montre.

Le ressort idéal aurait un diagramme formé par une droite telle

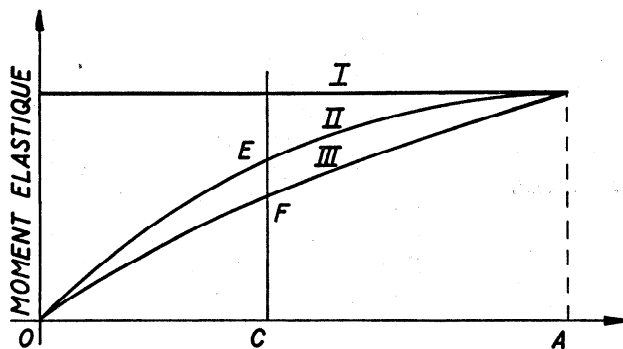


Fig. 53.

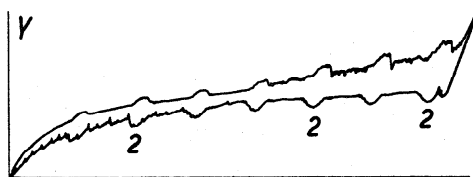
que I dans la figure 53. En réalité, la courbe de détente pourra avoir la forme des courbes II ou III. Supposons que la montre ait une durée de marche correspondant aux angles d'armage du ressort donnés par les abscisses OA et OC.

Nous dirons que le ressort II est meilleur puisque à la fin de la détente utilisée, le moment est représenté par l'ordonnée CE dans le cas du ressort II et par CF pour le ressort III.

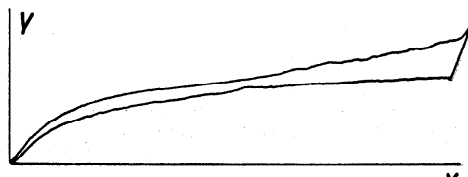
Il y a lieu d'examiner soigneusement l'allure des courbes d'armage et de désarmage. Cet examen peut révéler des anomalies de toutes sortes qu'il faut essayer de faire disparaître.

Parmi les irrégularités de la courbe du diagramme, il y en a de périodiques. Voici par exemple (fig. 54) un diagramme dans lequel une anomalie se répète à chaque tour: elle est indépendante du ressort et provient sans doute d'un frottement qui agit à chaque tour. Ce frottement se traduit, non seulement par les dépressions 2 de la courbe de détente, mais aussi par des bosses correspondantes de la courbe d'armage. Ceci est explicable puisque, à l'armage, le moment du ressort est augmenté du moment des résistances et vaut  $M + M_r$ , tandis que, à la détente, il est  $M - M_r$ .

Les irrégularités non périodiques sont souvent dues au ressort et proviennent par



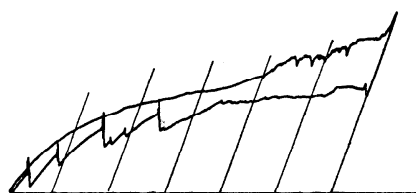
Ressort avec frottement anormal périodique.



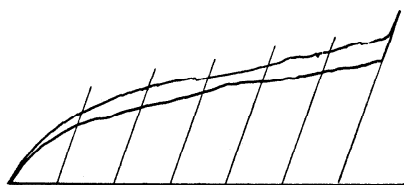
Le même ressort après suppression du frottement anormal.

Fig. 54

exemple d'un collement des spires suivi d'un brusque décollement (fig. 55) ; on peut éliminer ce défaut en graissant le ressort après l'avoir soigneusement nettoyé ; il ne suffit pas de graisser un ressort malpropre ou couvert d'une couche d'huile séchée.



*Ressort dont les spires collent.*



*Le même ressort après lubrification.*

Fig. 55

Une lame de ressort rugueuse est la cause d'un frottement accru entre les spires ; ce frottement, essentiellement capricieux, se traduit par une forme en zigzag des courbes du diagramme. Une lubrification au moyen de graisse atténue le défaut sans l'éliminer.

Quand on fait une retouche, on s'assure de son efficacité en refaisant un diagramme. Dans toutes les retouches, il faut chercher à faire disparaître la cause du mal ; quand on ne le peut pas, il faut bien se contenter de palliatifs.

Lorsque le ressort se développe excentriquement dans le barillet, il exerce contre l'arbre une pression qui augmente le frottement et, par conséquent, l'aire comprise entre les deux courbes du diagramme. Cette pression diminue le rendement du ressort.

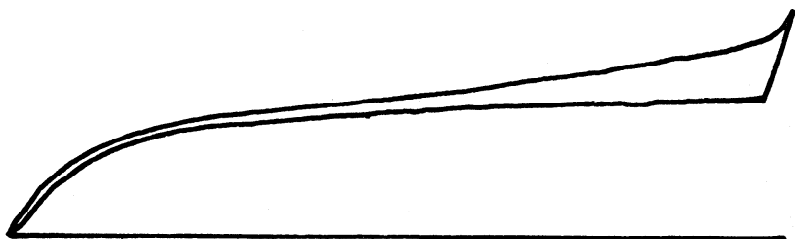


Fig. 55a

Le diagramme de la figure 55a est celui d'un ressort de moment de force régulier qui travaille normalement.

**Le développement concentrique du ressort. Les brides.** — Le ressort simplement accroché à la bonde et au tambour ne se développe pas concentriquement à l'arbre. Les lames se portent toutes d'un même côté



(fig. 56) ; elles exercent alors une forte pression sur l'arbre, augmentant le frottement de l'arbre contre le barillet et le couvercle et celui des lames entre elles, et, de ce fait, diminuent le rendement du ressort.

On obtient un développement plus ou moins concentrique au moyen de brides dont nous décrirons trois types assez répandus.

La bride est généralement prise dans un ressort. Celle que représente la figure 57 consiste en une lame légèrement arquée et rivée au ressort. La partie *A* en forme de languette soutient la lame du ressort et la renforce. L'extrémité du ressort est ainsi maintenue contre le tambour du barillet. Cette bride a l'avantage d'être rivée au ressort ; elle ne risque pas d'être perdue par un rhabilleur.

La *bride Coullery* est employée dans certaines montres de qualité très soignée ; c'est une lame de ressort *L* (fig. 58) dont la longueur est environ les  $\frac{3}{4}$  de la circonférence du tambour ; elle s'appuie par une extrémité à un crochet *A* fixé au tambour, tandis que l'autre extrémité sert d'appui au ressort *R* qui porte un rivet auquel vient s'accrocher la bride. L'extrémité libre *B* du ressort de barillet s'appuie contre le tambour lui-même.

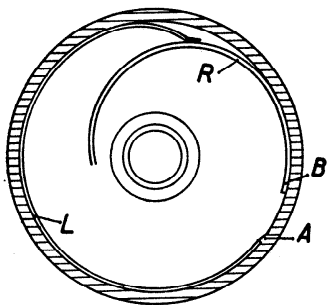


Fig. 58

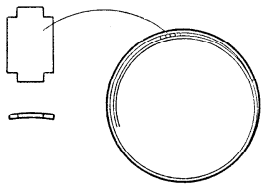


Fig. 59

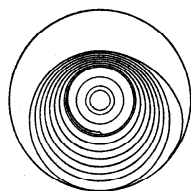


Fig. 56

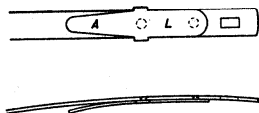


Fig. 57

L'extrémité libre *B* du ressort de barillet s'appuie contre le tambour lui-même.

La *bride de Genève* est une petite plaque prise généralement dans un ressort et présentant deux saillies. L'une des faces est plane, l'autre convexe (fig. 59). Elle s'introduit entre la première et la seconde spire du ressort à environ  $\frac{1}{6}$  de tour à partir du crochet, le côté convexe tourné vers le tambour. La saillie inférieure se place dans une entaille de forme correspondante, pratiquée dans le fond du barillet, tandis que la saillie supérieure est maintenue dans une entaille identique ménagée dans le couvercle. La bride maintient l'extrémité de la spire extérieure du ressort contre le tambour lorsque le ressort s'enroule sur la bonde.

La bride agit sur la lame du ressort à un endroit où celle-ci n'est pas recuite. Son action est plus efficace que celle d'un simple crochet qui agit sur une portion de lame recuite dont la réaction élastique est insuf-

fisante. Cette bride donne de très bons résultats, mais présente des inconvénients : elle est constituée par une petite pièce non attachée au ressort et qui se perd facilement ; elle est difficile à mettre en place ; ces deux caractéristiques incitent la plupart des rhabilleurs à la supprimer.

**Modes d'attache du ressort au barillet.** — La manière d'accrocher le ressort au tambour du barillet n'est pas indifférente et a beaucoup préoccupé les horlogers. Nous n'avons pas à décrire ici tous les systèmes que ceux-ci ont proposés ; nous nous bornerons à indiquer les conditions que doit remplir une bonne attache du ressort au barillet.

Le crochet doit être solide et sûr ; il faut éviter les systèmes dans lesquels l'extrémité de la lame du ressort est recourbée ou ceux qui exigent le recuit d'une partie du ressort ; le crochet ne doit pas dépasser la paroi intérieure du tambour afin de permettre à la première spire du ressort de s'appuyer contre le tambour sur toute sa longueur.



Fig. 60

Voici deux exemples de crochets qui remplissent ces conditions quand ils sont bien exécutés. Le type représenté par la figure 60 comprend un crochet d'acier rivé à l'extrémité de la lame qui n'a pas besoin d'être recuite ; le crochet pénètre dans un trou ou dans une entaille pratiquée dans le tambour. Ce système simple fut souvent appliqué dans les montres anciennes. La figure 61 montre une autre solution du problème. Le crochet du système précédent est remplacé par une lame, rivée à l'extrémité du ressort, qui s'engage dans une entaille faite dans le tambour.



Fig. 61

**Déformation permanente des ressorts.** — Le fabricant donne au ressort une forme comme celle qui est représentée par la figure 62.

Pour introduire ce ressort dans le barillet, l'horloger se sert d'une estrapade représentée schématiquement dans les figures 63 et 63 a. Pendant cette opération, le ressort est fortement déformé ; si on le sort du barillet après l'avoir enroulé autour de la bonde, on voit qu'il ne reprend pas la forme primitive que lui avait donnée le fabricant ; il a subi une déformation permanente ; la limite d'élasticité a été dépassée.



Fig. 62

Dans la montre, le ressort est armé et désarmé tous les jours ; chaque fois, il subit une déformation dont une partie ne disparaît pas ; il se déforme de plus en plus jusqu'à ce qu'il ait atteint une

forme définitive qui ne se modifie plus. *Le ressort s'est rendu*, suivant l'expression des horlogers.

Mais le ressort rendu n'a plus la même forme qu'auparavant ; au fur et à mesure que les jours passent, le ressort perd sa force, les impulsions de l'échappement diminuent d'intensité ainsi que l'amplitude des oscillations du balancier. Or, nous savons que les oscillations d'amplitude constante sont favorables au réglage de la montre.

La diminution du moment élastique d'un ressort qui a subi une déformation permanente n'est pas due à une modification sensible des propriétés élastiques de ce ressort. Dans la formule du moment du ressort à section rectangulaire et armé d'un angle  $\alpha$  :

$$M = \frac{Ee^3h}{12L}\alpha,$$

le facteur qui caractérise les qualités élastiques du ressort est le module de traction  $E$  dont la valeur n'est pas beaucoup modifiée par les déformations permanentes. Par contre l'angle  $\alpha$  est diminué notablement parce qu'après la déformation, l'enroulement permanent est plus grand.

Il faut chercher à faire le ressort de telle sorte que l'enroulement permanent n'augmente pas trop par le fait des remontages et des détentes.

Les fabricants donnent à leurs ressorts des formes diverses qui sont :

- la forme spirale (fig. 64),
- la forme demi-renversée (fig. 65),
- la forme renversée (fig. 66).

Les trois figures mentionnées indiquent la forme donnée par le fabricant, puis la forme après un armage et enfin la forme après 20 armages et 24 heures dans le barillet.

Après 20 armages, l'enroulement permanent est de 5 1/2 tours pour le premier ressort, d'un peu moins de 5 tours pour le second et d'un peu plus de 4 1/2 tours pour le troisième.

Les figures 67, 68 et 69 représentent des ressorts de même forme initiale (spirale, demi-renversée, renversée), mais de meilleure qualité. Après 20 armages et 12 heures dans le barillet, l'enroulement permanent est :

- 5 1/8 tours pour le ressort spirale,
- 4 5/8 tours pour le ressort demi-renversé,
- 4 1/8 tours pour le ressort renversé.

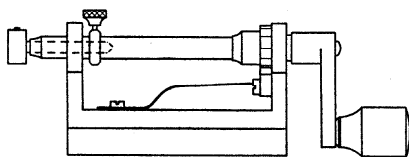


Fig. 63

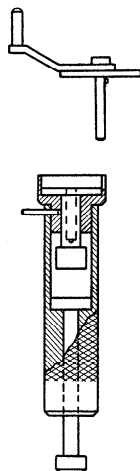


Fig. 63a

Fig. 64

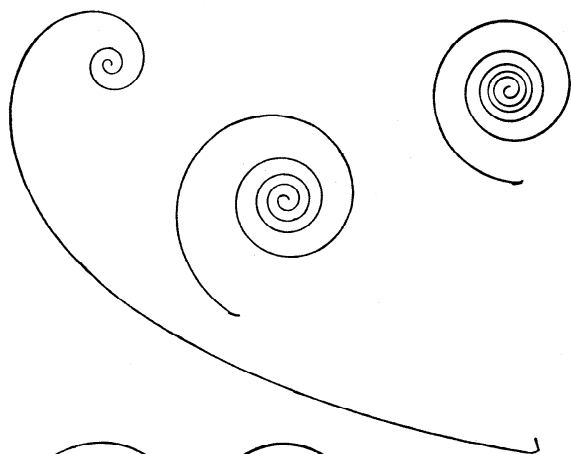


Fig. 65

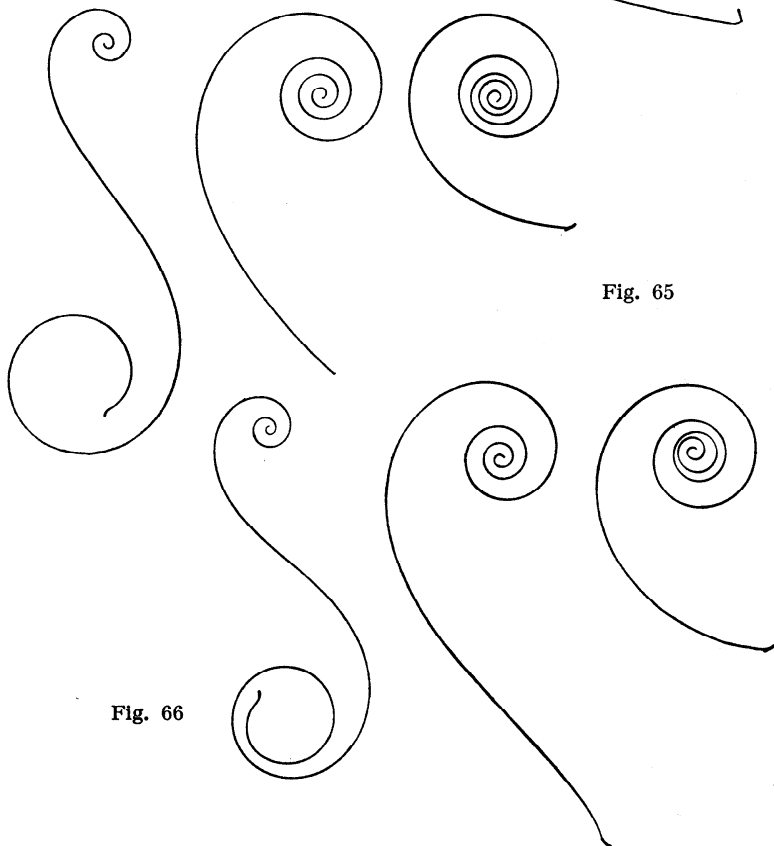


Fig. 66

Les formes renversées et demi-renversées ont donc des avantages ; peut-être aussi quelques inconvénients dus au fait que ces formes sont obtenues par l'estrapadage, opération brutale qui modifie certainement l'arrangement des molécules et, par conséquent, certaines propriétés élastiques. Le ressort spirale a été moins tourmenté.

Le « renversement » a des avantages, mais il convient de ne pas l'exagérer. Dans une étude consacrée à ce type de ressort, G.-A. Berner a montré que l'avantage du renversement existe parfois, mais pas toujours. Un autre facteur — la qualité du ressort — semble jouer d'ailleurs un rôle aussi important que la forme.

On ne peut donc pas prétendre que le ressort renversé ou demi-renversé est toujours supérieur à un ressort spirale. Là aussi, le diagramme du dynamomètre avant et après un certain nombre d'armages du ressort permet de calculer la diminution du moment élastique résultant de ces armages.

Le ressort renversé a un enroulement initial  $N_0$  plus faible, ce qui est un avantage si l'on s'en rapporte à la formule (13). Mais cette forme augmente aussi la déformation du ressort, donc le risque de déformation permanente et de rupture.

Il y aurait intérêt à donner au ressort la forme désirée par une opération thermique analogue au fixage des spiraux. Le ressort ainsi formé n'aurait pas les tensions internes provoquées par l'estrapadage ; il serait plus stable et sans doute moins sujet à la rupture.

**Utilisation rationnelle du développement du ressort.** — L'examen du diagramme d'un ressort fait constater la présence de trois sections dans la courbe d'armage : la première et la dernière ont une pente très accentuée, tandis que la pente de la deuxième section — la plus longue du reste — est plus faible. Les parties de la courbe à pente très marquée correspondent à l'état du ressort où le frottement des spires entre elles

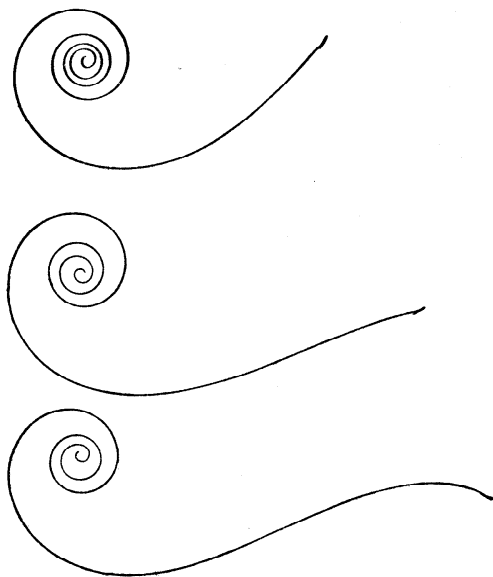


Fig. 67

est considérable, que le ressort soit appuyé contre le tambour (début de la courbe) ou qu'il soit enroulé autour de la bonde (fin de la courbe).

La courbe de détente présente les mêmes particularités, mais les pentes sont moins marquées.

Puisque nous désirons une force motrice aussi régulière que possible,

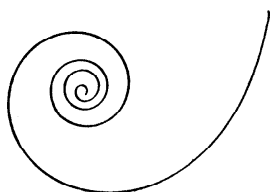
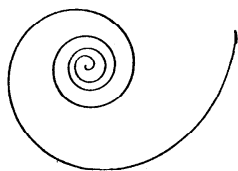
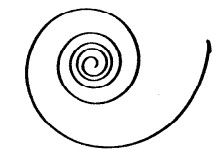


Fig. 68

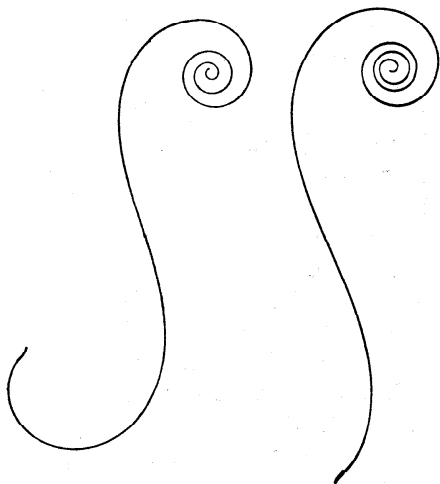


Fig. 69

nous avons avantage à n'utiliser qu'une partie du développement : celle où la courbe de détente se rapproche le plus d'une droite parallèle à l'axe horizontal.

On n'utilise jamais toute la force du ressort. Dans les montres qui doivent être remontées tous les jours, on s'arrange de façon que le développement complet du ressort se fasse en 30, 32 ou 35 heures, mais normalement on ne laisse marcher la montre que 24 heures. La force est d'autant plus régulière que la partie utilisée du développement est plus petite. On a avantage à augmenter autant que possible le développement disponible.

On emploie parfois des dispositifs, les *arrêtages*, qui empêchent de remonter le ressort à fond et de le laisser se détendre complètement.

Le plus répandu de ces dispositifs est l'*arrêtage à croix de Malte* qui se compose de la *roue d'arrêt A* et du *doigt B* (fig. 70). Le doigt est fixé sur l'arbre de barillet, tandis que la roue d'arrêt est solidaire du couvercle.

Pendant le remontage, c'est le doigt qui tourne dans le sens de la flèche 1 ; pendant la détente du ressort, c'est-à-dire pendant que la montre marche, le doigt est immobile tandis que la roue d'arrêt se meut (flèche 3) avec le barillet et son couvercle.

La roue d'arrêt a généralement 4 dents creusées de façon à s'appliquer très librement sur le pourtour du doigt (position 1) ; elle a une cinquième dent arrondie C qui est la dent d'arrêt. Dans la position 2, le doigt qui tournait dans le sens de la flèche 1 vient buter contre la dent d'arrêt : le remontage est terminé. Pendant la marche de la montre, la roue d'arrêt (croix de Malte) tourne autour du doigt immobile ; à chaque tour

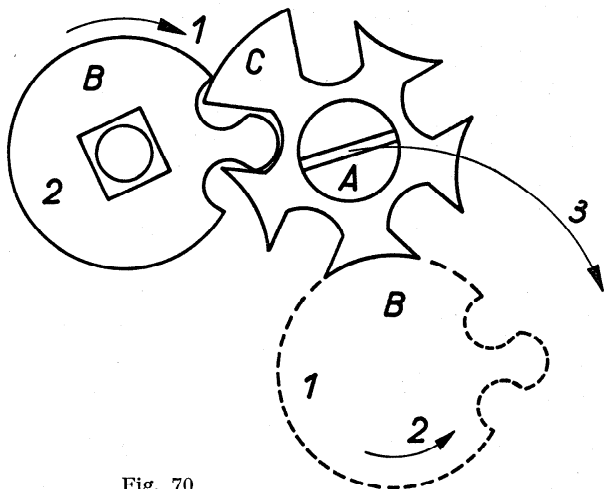


Fig. 70

le doigt entraîne une dent de la roue d'arrêt et, après 4 tours, la dent d'arrêt viendra buter contre le doigt : le mouvement du barillet et de son couvercle est arrêté, l'échappement ne reçoit plus de force, les impulsions cessent, la montre s'arrête.

Dans le barillet, le ressort n'est pas complètement détendu, mais il ne peut plus agir.

L'arrêtage ne permet pas de tendre le ressort au maximum. Cela n'est pas un mal, car un armage exagéré provoque parfois le rebattement ou même la rupture du ressort ; en tous cas, il engendre un frottement important entre les spires et une forte traction sur l'attache du barillet.

L'arrêtage ne rend pas la force du ressort plus régulière, mais il permet de n'utiliser de cette force que la partie qui varie le moins.

On peut faire des arrêtages permettant 3, 4, 5, ... tours de développement ; il suffit de modifier le nombre des dents de la roue d'arrêt. On peut aussi construire des arrêtages pour un nombre fractionnaire de tours.

La construction de ces dispositifs pose certains problèmes mécaniques ; les forces agissant sur la roue d'arrêt sont considérables ; si la construc-

tion n'est pas correcte, les fortes pressions tendent à disloquer le mécanisme. Il faut construire l'arrêtage de façon que la pression du doigt soit dirigée autant que possible vers le centre de la roue d'arrêt comme l'indique la figure 71.

L'arrêtage n'est plus employé que dans quelques montres très soignées. Il doit être très bien fait car, si le doigt n'est pas bien rond, le frottement contre le creux de certaines dents de la roue d'arrêt peut provoquer l'arrêt de la montre ou une absorption de force qui, pendant un certain temps, fait diminuer l'amplitude des oscillations du balancier et modifie la marche de la montre.

La partie du développement que permet d'utiliser l'arrêtage est déterminée par la position relative du doigt et de la roue d'arrêt. Les rhâbilleurs ne connaissent pas toujours ce dispositif ou craignent qu'il soit

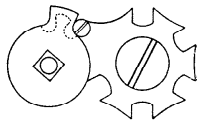
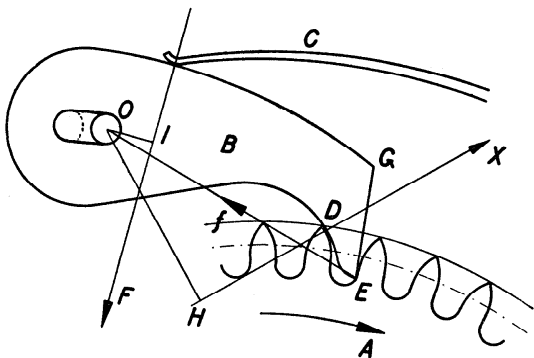


Fig. 71



une cause d'ennuis et, pour plus de sécurité, enlèvent une des pièces. Puisque ce mécanisme n'est pas indispensable, la montre marche quand même.

L'arrêtage supprime la partie du développement pendant laquelle le frottement des spires entre elles est considérable. En obligeant le ressort à se développer concentriquement, les brides concourent au même résultat.

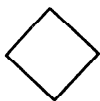


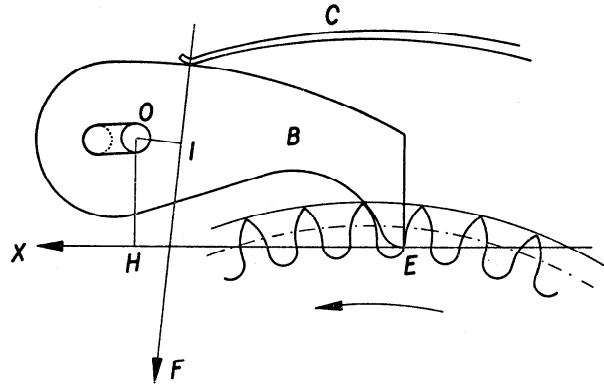
Fig. 72

**L'encliquetage.** — L'arrêtage bien placé empêche de remonter le ressort de barillet jusqu'à sa plus grande tension ; il supprime la possibilité qu'une force trop grande engendre la rupture du ressort ou provoque des impulsions si intenses qu'elles augmenteraient l'amplitude du balancier jusqu'au « rebattement », phénomène nuisible à certains organes de l'échappement et néfaste à la marche régulière de la montre.

On évite les trop fortes tensions du ressort dans les montres sans arrêtage, en permettant un certain recul au cliquet qui empêche l'arbre de barillet de tourner en sens inverse de celui du remontage.



Le cliquet est une pièce de l'encliquetage, qui comprend une roue dentée, un rochet *A* (fig. 72) fixé sur l'arbre du barillet, un cliquet *B* mobile autour du point *O* et un ressort *C* qui presse le cliquet contre les dents du rochet. En remontant la montre, on fait tourner le rochet dans le sens de la flèche : la dent *D* soulève le cliquet qui retombe dans le vide suivant. Dès que *D* commence d'agir, le cliquet *B* est entraîné vers la droite et l'arbre *O* occupe la partie de gauche (en pointillé dans la figure 72) du trou oblong. La tension du ressort cherche à faire tourner le rochet en sens inverse de celui de la flèche ; la dent *E* presse contre la paroi *EG* avec une force qui maintient le cliquet en place. La force doit passer sous le centre *O* du cliquet (fig. 73).



Un encliquetage doit être doux, c'est-à-dire que la force imprimée au rochet pour faire fonctionner l'encliquetage doit être faible ; cette force s'ajoute à celle qui est

nécessaire pour remonter le ressort moteur. Appelons *X* la force supplémentaire pour l'encliquetage (fig. 72) ; son bras de levier par rapport à *O* est *OH*. Le moment de la force *X* est :

$$X \cdot OH.$$

Ce moment doit être égal au moment de la force *F* du ressort d'encliquetage, qui tend à maintenir le cliquet en place ; son bras de levier est *OI*, et l'on a :

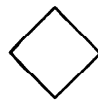
$$X \cdot OH = F \cdot OI$$

ou

$$X = F \frac{OI}{OH}.$$

Pour rendre *X* plus petit, tantôt on diminue *F* ou *OI*, tantôt on augmente le bras de levier *OH*.

Fig. 73



Le ressort étant complètement enroulé autour de la bonde, si l'extrémité du cliquet se trouve un peu plus à gauche que le sommet d'une dent du rochet, le ressort *C* presse le cliquet dans le vide et ajoute sa force à la tension du ressort. Cette surtension peut engendrer la rupture du ressort ou le rebattement.

Cet inconvénient peut être évité, si l'on munit le cliquet d'un trou oblong dont la forme est un rectangle terminé par deux demi-cercles. Pendant le remontage, l'arbre du cliquet est à l'extrémité de gauche du trou. Dès que le remontage est terminé, le ressort pressant le cliquet avec la force *X* (fig. 73) l'oblige à reculer et, avec lui, le rochet recule d'une ou de plusieurs dents sous l'influence du ressort de barillet qui se détend un peu. Non seulement la surtension ne peut pas se produire, mais le ressort n'est jamais tendu complètement. La figure 74 représente un encliquetage permettant au rochet de reculer de plus de 3 pas. Le cliquet *C* est pressé contre le rochet par le ressort circulaire *F* agissant en *A* et dont l'extrémité recourbée *B* est introduite dans un trou du pont de barillet.

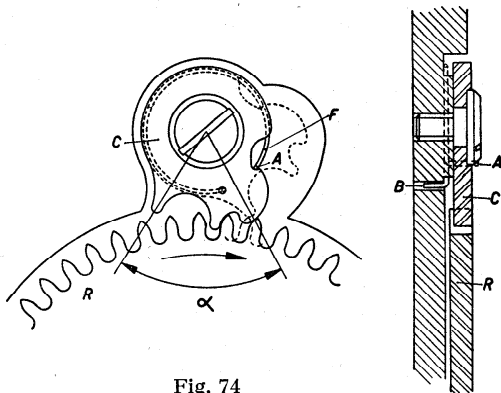


Fig. 74

**La rupture des ressorts.** — La rupture des ressorts préoccupe depuis très longtemps les horlogers, les fabricants aussi bien que les rhabilleurs. Les discussions et les recherches à ce sujet furent nombreuses, mais ne contribuèrent pas toujours à éclairer le problème.

Plusieurs causes peuvent provoquer la rupture des ressorts, mais il en est une sans laquelle la rupture ne se produirait que très rarement, et il en est de secondaires qui ne sont néfastes que parce qu'elles aident à la cause principale à se manifester.

La cause principale est l'effort exagéré que l'on exige des ressorts de barillet. Il suffit de placer un ressort neuf dans son barillet, de le tendre puis de le sortir, pour que sa forme soit modifiée. Le ressort travaille donc au-dessus de la limite élastique; or, dans les métaux utilisés pour la confection des ressorts, celle-ci n'est pas très éloignée de la limite de rupture.

A la flexion, les fibres sont sollicitées inégalement; les unes sont allongées, d'autres raccourcies, tandis que les fibres du plan neutre

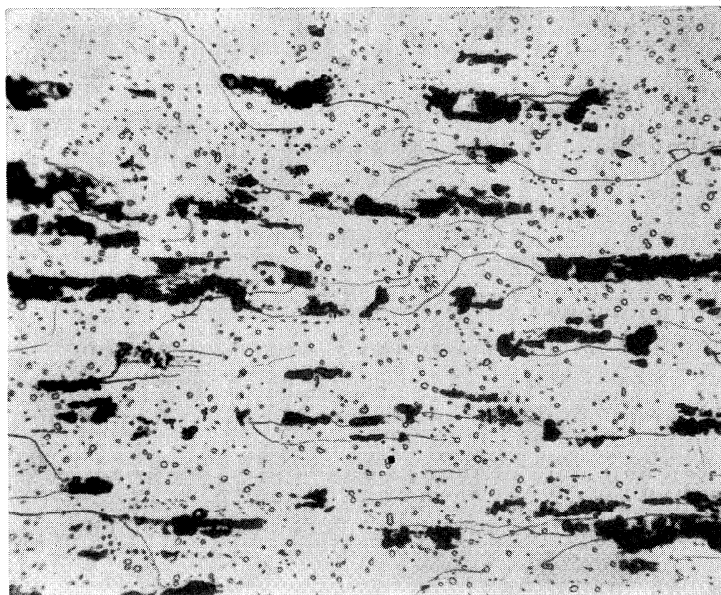


Fig. 76

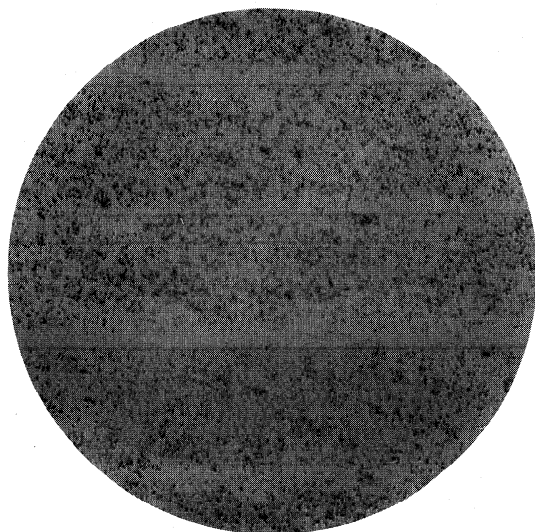


Fig. 75



changent de forme mais pas de longueur. L'allongement des fibres extérieures est proportionnel à la distance de ces fibres au plan neutre. On a montré que dans les ressorts de barillet, les fibres extérieures travaillent au-dessus de la charge de rupture, et si le ressort ne rompt pas, c'est que d'autres fibres, plus proches du plan neutre, ne sont pas soumises à la même tension. Pour un ressort en acier au carbone, tel qu'il est utilisé en horlogerie, l'allongement de chaque fibre ne devrait pas dépasser 2% ; en réalité, l'allongement de la fibre extérieure d'un ressort enroulé sur une bonde de dimension normale atteint et dépasse parfois 2,8%.

En mécanique, on travaille très rarement dans des conditions aussi dangereuses. Les ingénieurs calculent toujours avec un important facteur de sécurité afin de rester, non seulement en dessous de la limite de rupture, mais en dessous de la limite élastique ; ils ne toléreraient pas des ressorts qui se déforment dans les conditions normales de travail.

Le ressort de barillet travaille si dangereusement que le moindre facteur défavorable peut amener sa rupture.

Il va sans dire que la qualité du métal joue un rôle primordial, puisque, d'un métal à l'autre, les valeurs de la limite élastique pour l'allongement, la charge de rupture et le module de traction diffèrent.

Généralement les ressorts de barillet sont en acier dont la teneur en carbone est 1,1 à 1,2% ; ce sont des aciers hypereutectoïdes dont les constituants d'équilibre sont la *cémentite* ( $\text{Fe}_3\text{C}$ ) et la *ferrite* qui est une solution solide de carbone dans le fer  $\alpha$  (le fer peut dissoudre au maximum 0,04% de carbone à 720°). Cet alliage ne contient pas seulement les deux constituants fer et carbone, mais encore d'autres éléments en petites quantités, suffisantes cependant pour modifier certaines propriétés de l'alliage. Ainsi les aciers dont il est question ici contiennent encore du silicium et du manganèse, ainsi que deux constituants indésirables, le soufre et le phosphore, qui augmentent la fragilité.

Les fabricants de ressorts s'efforcent d'obtenir des alliages dans lesquels les teneurs en Si, Mn, S et P ne dépassent pas certaines limites, d'ailleurs très basses (pour S et P, par exemple, la limite est 0,01%).

La composition d'un alliage ne détermine pas, à elle seule, ses propriétés. Dans le cas des ressorts, l'acier du lingot coulé doit subir de nombreux traitements jusqu'à ce qu'il soit réduit en lames minces ; ces traitements sont mécaniques — laminage à chaud et à froid — chimiques, tels que le décapage, et thermiques — recuit, trempe, revenu, étuvage.

La structure du métal est influencée par plusieurs de ces traitements ; il importe donc que ceux-ci soient exécutés de façon à obtenir la structure donnant les meilleures propriétés élastiques.

Parmi les défauts éventuels de structure qu'il faut s'efforcer d'éliminer, quelques-uns sont mis en évidence dans les planches III à V. Ce sont : décarburation de la surface à la suite d'un traitement thermique défectueux (pl. III, fig. 75) ; présence d'impuretés sous forme d'amas ou de chapelets (pl. III, fig. 76) ; présence de fissures plus ou moins prononcées qui sont des amorces de corrosion (pl. IV, fig. 77). La figure 78 (pl. IV) montre la structure d'un bon acier pour ressorts.

Ces quelques figures sont données à titre d'exemples. La rupture des ressorts peut être provoquée par d'autres défauts de structure du métal : par des grains trop volumineux de cémentite qui peuvent être rompus au laminage, car la cémentite est un constituant dur et fragile (pl. V, fig. 78a) ; par la graphitisation ; par l'occlusion de gaz, etc. L'examen métallographique est très délicat ; il suppose des connaissances approfondies et la grande expérience qui caractérise les métallographes professionnels. La préparation des échantillons, l'attaque et la prise de photographies ne sont que la partie technique du métier de métallographe. L'opération la plus difficile et la plus importante au point de vue pratique, c'est l'interprétation des microphotographies.

Lorsque les lames pour les ressorts sont préparées, polies, trempées et revenues, le fabricant leur donne une des formes que nous avons mentionnées : forme spirale, demi-renversée, renversée, par un estrapadage à froid. Cette opération brutale déforme le ressort de façon permanente ; il est probable que ce dépassement de la limite élastique altère la structure du métal. Il vaudrait mieux donner au ressort sa forme définitive par un traitement thermique analogue au fixage des spiraux. On obtiendrait un métal dans lequel les tensions internes seraient éliminées, un ressort plus stable et moins sujet à la rupture.

Parmi les autres causes secondaires, les unes peuvent être éliminées, parce qu'elles sont dues à des erreurs de construction ou de manipulation, tandis que les autres ne dépendent pas de nous.

Dans les causes évitables, nous trouvons celles qui imposent au ressort, à une certaine place, un rayon de courbure trop petit.

On peut citer d'abord les bondes trop petites. On adopte la valeur 32 : 1 pour exprimer le rapport entre le diamètre de la bonde et l'épaisseur du ressort. Elle a été déduite par Jules Grossmann pour un ressort dont l'enroulement à l'état désarmé dans le barillet était de 13 tours. Il avait trouvé que l'allongement des fibres extérieures par la flexion maximum était deux fois plus grand que celui qui précède immédiatement la rupture dans un essai de traction ; il en concluait que, puisque cet allongement exagéré des fibres extérieures n'amène pas la rupture, on pouvait admettre, comme dans le ressort examiné, le rapport 32 : 1 entre le diamètre de la bonde et l'épaisseur du ressort.

Une autre règle recommande de faire le diamètre de la bonde égal à  $1/3$  du diamètre intérieur du barillet. Dans le cas cité plus haut, on avait :

diamètre du barillet = 17,4 mm,

diamètre de la bonde = 5,8 mm,

épaisseur du ressort = 0,18 mm.

Les deux conditions mentionnées sont remplies, car :

$$\frac{17,4}{5,8} = 3 \quad \text{et} \quad \frac{5,8}{0,18} = 32.$$

C'est un hasard, car ces deux conditions tendent à des résultats qui n'ont rien à faire l'un avec l'autre ; le diamètre de la bonde est déterminé tantôt d'après le diamètre intérieur du barillet afin de laisser au ressort

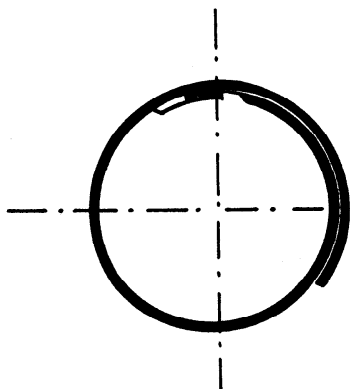


Fig. 79

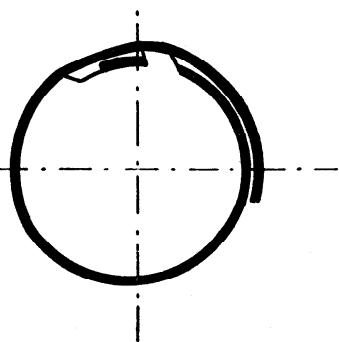


Fig. 80

un espace suffisant pour son développement, tantôt d'après l'épaisseur du ressort pour ne pas imposer à ce dernier un rayon de courbure trop petit. Ces deux conditions sont contradictoires puisque l'on ne peut augmenter l'espace libre pour le développement qu'en augmentant en même temps les chances de rupture du ressort. Dans la plupart des cas, il vaut mieux avoir une bonde qui ne risque pas d'amener la rupture du ressort ; il convient donc de respecter autant que possible la règle qui veut que le diamètre de la bonde soit au moins égal à 32 fois l'épaisseur du ressort.

Une erreur de construction très préjudiciable consiste à faire le crochet de la bonde trop haut. Les figures 79 et 80 montrent la forme correcte du crochet et la forme défectueuse. Un crochet trop haut provoque

une courbure très prononcée de la première spire qui se répercute sur toutes les autres spires.

Pour attacher le ressort à la bonde, on forme le « coquillon » en pliant l'extrémité intérieure du ressort. Cette opération n'est possible que si l'extrémité de la lame est recuite ; cette partie doit être assez longue pour que le passage de la partie détrempee à la partie trempée ne soit pas trop brusque.

On accuse quelques facteurs indépendants de notre volonté d'être des causes de rupture des ressorts, par exemple les variations brusques de la température, provoquant la condensation d'humidité ; celle-ci amorce la formation de piqûres de rouilles, c'est-à-dire un affaiblissement qui peut être fatal au ressort ; le même phénomène peut être produit par les orages ou par les périodes humides.

La corrosion est un phénomène électro-chimique qui se produit entre deux éléments de nature différente en présence d'un électrolyte ; elle est accélérée par une fissure, si petite soit-elle.

Certains horlogers ont remarqué que les ressorts se rompent parfois après un passage dans la benzine. Si la rupture a lieu au moment où le ressort est sorti du bain, on peut croire à un effet de contraction provoqué par le refroidissement brusque dû à l'évaporation de la benzine. Si la rupture a lieu plusieurs heures après, on peut supposer que la benzine a laissé un peu d'eau qui, surtout si elle a trouvé une fissure dans l'acier, a corrodé rapidement le métal.

Le danger de corrosion, qui est grand pour les instruments destinés aux pays chauds et humides, a suscité l'essai d'alliages non oxydables pour en faire des ressorts moteurs. On utilise des alliages contenant, par exemple, du cuivre, du glucinium, du nickel, du cobalt, du molybdène, etc. ou des alliages en acier chrome-nickel avec adjonction de cobalt, de molybdène, de tungstène, etc. Voici, par exemple, les compositions approximatives de deux alliages utilisés actuellement :

ressort Durober : Fe 0,15 ; Cr 0,15 ; Ni 0,60 ; Mo 0,07 ;  
Gl 0,0015 ; Mn 0,02 ; C 0,0006 ;

ressort Durapower : Fe 0,15 ; Cr 0,20 ; Ni 0,15 ; Mo 0,07 ;  
Gl 0,0013 ; Mn 0,02 ; C 0,0009 ; Co 0,40.

Dans les essais de nouveaux alliages, il ne faut pas perdre de vue la cause principale de rupture des ressorts : l'effort imposé au ressort, qui l'oblige à travailler près de la charge de rupture. Un nouvel alliage pour ressorts doit, avant tout, avoir une limite élastique et une charge de rupture très élevées ; s'il est de surcroît inoxydable, amagnétique et facile à usiner, il peut être appelé à remplacer l'acier au carbone.



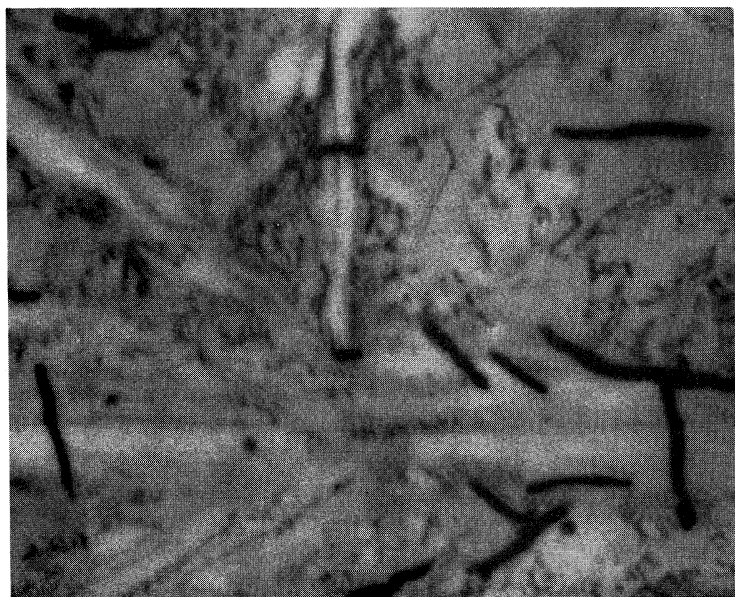


Fig. 77

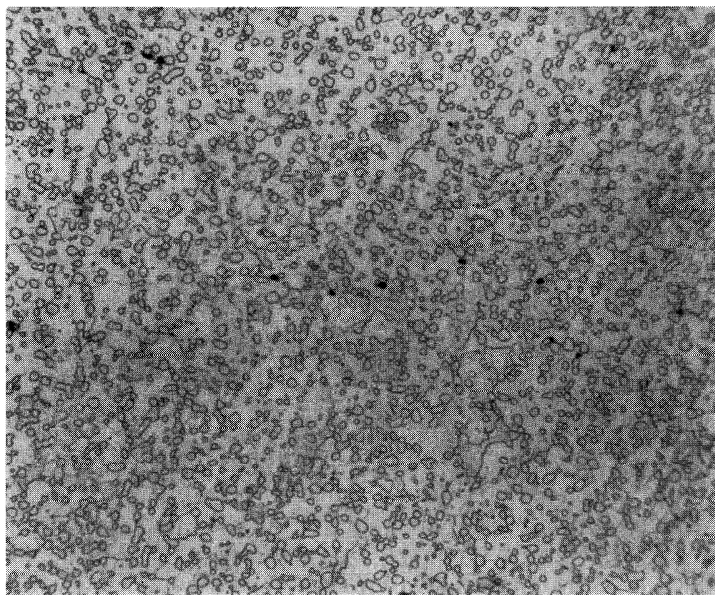


Fig. 78



**Le nombre de tours de développement du ressort.** — Le technicien qui construit une montre choisit au préalable les dimensions du mouvement et la durée de marche. Le ressort moteur devra assurer cette durée de marche avec une réserve d'au moins 8 heures pour une montre qui doit être remontée tous les jours. Mais avec un grand nombre de tours de développement, il est facile d'avoir une période pendant laquelle le moment du ressort varie relativement peu ; il faut donc prévoir un ressort dont le développement soit le plus grand possible.

Le premier problème que nous nous proposons de résoudre est l'établissement des relations existant entre le diamètre intérieur du barillet, le nombre de tours de développement et les dimensions du ressort. Nous avons préalablement déterminé le diamètre de la bonde qui limite l'espace réservé au ressort.

Nous prendrons le diamètre de la bonde égal à  $1/3$  du diamètre intérieur du barillet. Nous connaissons aussi la relation entre le diamètre de la bonde et l'épaisseur du ressort ; mais cette épaisseur étant inconnue pour l'instant, il faut, en première approximation, s'en tenir à la première règle.

Pour le ressort, deux des dimensions — l'épaisseur et la longueur — influencent les possibilités de développement, mais ces dimensions sont encore inconnues.

Proposons-nous d'abord de trouver l'équation qui relie le nombre de tours de développement  $N$  et la longueur  $L$  du ressort, si nous supposons connus le rayon  $R$  du barillet, le rayon  $r$  de la bonde et l'épaisseur  $e$  du ressort.

Le ressort armé dans le barillet occupe, autour de la bonde, une couronne circulaire de rayon extérieur  $\varrho_1$  (fig. 81) et de rayon intérieur  $r$ . Les lames sont serrées les unes contre les autres ; nous les supposons circulaires et nous admettons qu'il n'y a aucun jour entre elles.

Soit  $N''$  le nombre de tours du ressort ainsi enroulé ; si nous faisons abstraction de la portion  $AB$  de la lame qui relie la couronne au tambour du barillet, nous pouvons dire que l'espace occupé par le ressort est  $Le$  ; il vaut aussi :

$$\pi (\varrho_1^2 - r^2).$$

Comme  $\varrho_1 = r + N''e$ , nous aurons :

$$\pi [(r + N''e)^2 - r^2] = Le$$

ou

$$eN''^2 + 2rN'' - \frac{L}{\pi} = 0.$$

La résolution de cette équation nous donne :

$$N'' = \frac{1}{e} \left( \sqrt{r^2 + \frac{Le}{\pi}} - r \right).$$

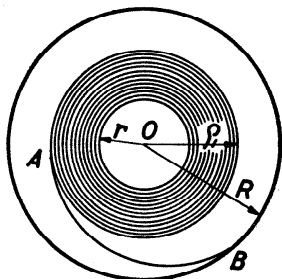


Fig. 81

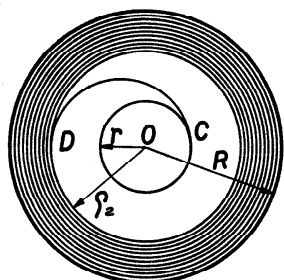


Fig. 82

Quand le ressort est désarmé dans le barillet, les spires se touchent et la dernière est appuyée contre le tambour (fig. 82); il occupe, si nous faisons abstraction de l'extrémité  $CD$ , une couronne circulaire de rayon extérieur  $R$  et de rayon intérieur  $\varrho_2$ . Nous avons  $\varrho_2 = R - N'e$ , si  $N'$  indique le nombre de tours du ressort désarmé dans le barillet. La surface occupée par le ressort est :

$$Le = \pi (R^2 - \varrho_2^2) = \pi [R^2 - (R - N'e)^2]$$

ou

$$eN'^2 - 2RN' + \frac{L}{\pi} = 0.$$

La résolution de cette équation donne :

$$N' = \frac{1}{e} \left( R - \sqrt{R^2 - \frac{Le}{\pi}} \right).$$

Le nombre  $N$  de tours de développement du ressort est :

$$N = N'' - N' = \frac{1}{e} \left( \sqrt{r^2 + \frac{Le}{\pi}} - r \right) - \frac{1}{e} \left( R - \sqrt{R^2 - \frac{Le}{\pi}} \right)$$

ou

$$N = \frac{1}{e} \left( \sqrt{r^2 + \frac{Le}{\pi}} + \sqrt{R^2 - \frac{Le}{\pi}} - R - r \right). \quad (15)$$

**Le développement maximum.** — Dans un barillet donné, on peut loger des ressorts de même épaisseur qui n'auraient pas le même développement; en effet, la longueur  $L$  intervient aussi dans la formule (15).

Il va sans dire que  $L$  ne peut pas être plus petit que  $R - r$ ; mais si  $L = R - r$ , il n'y a aucune possibilité d'enrouler le ressort, donc  $N = 0$ .

Si le ressort est assez long pour remplir tout l'espace situé entre la bonde et le tambour, le développement est également impossible, donc  $N = 0$ .

Les cas utilisables sont situés entre ces extrêmes.

En admettant les valeurs de  $R$ ,  $r$  et  $e$  et en calculant  $N$  pour des valeurs croissantes de  $L$ , on obtient des valeurs d'abord croissantes, puis décroissantes.  $N$  passe donc par un maximum, ainsi qu'on peut s'en rendre compte sur la courbe de la figure 83 qui représente la fonction  $N = f(L)$  pour les valeurs suivantes :  $R = 3$  mm,  $r = 1$  mm,  $e = 0,06$  mm. Avec ces données, la formule (15) devient :

$$N = \frac{1}{0,06} \left( \sqrt{1 + 0,0191L} + \sqrt{9 - 0,0191L} - 4 \right).$$

Les longueurs pour lesquelles le développement est nul sont ici  $L = 0$  et  $L = 418,8$  mm. On les obtient en résolvant l'équation  $N = 0$ .

Les valeurs de  $N$  correspondant à différentes valeurs de  $L$  comprises entre 0 et 418,8 mm sont inscrites dans le tableau suivant :

| $L$ | $N$   | $L$   | $N$       |
|-----|-------|-------|-----------|
| mm  | tours | mm    | tours     |
| 0   | 0     | 209,4 | 7,87 max. |
| 5   | 0,51  | 220   | 7,85      |
| 10  | 0,98  | 240   | 7,73      |
| 20  | 1,86  | 260   | 7,52      |
| 40  | 3,30  | 280   | 7,18      |
| 60  | 4,45  | 300   | 6,70      |
| 80  | 5,38  | 320   | 6,10      |
| 100 | 6,15  | 340   | 5,35      |
| 120 | 6,73  | 360   | 4,38      |
| 140 | 7,20  | 380   | 3,23      |
| 160 | 7,53  | 400   | 1,75      |
| 180 | 7,75  | 410   | 0,88      |
| 200 | 7,85  | 418,8 | 0         |

Si l'on dérive l'équation (15) par rapport à  $L$  pris comme variable, on obtient :

$$\frac{dN}{dL} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{\sqrt{r^2 + \frac{Le}{\pi}}} - \frac{1}{\sqrt{R^2 - \frac{Le}{\pi}}} \right).$$

La résolution de l'équation :

$$\frac{dN}{dL} = 0$$

donnera la valeur de  $L$  pour laquelle le développement  $N$  du ressort est maximum. On trouve :

$$L = \pi \frac{R^2 - r^2}{2e}. \quad (16)$$

On peut aussi écrire cette équation sous la forme :

$$Le = \frac{1}{2} \pi (R^2 - r^2)$$

et la traduire par la règle suivante : *le développement du ressort est maximum quand l'espace  $Le$  occupé par le ressort (armé ou désarmé dans le barillet) est égal à la moitié de l'espace libre entre le tambour et la bonde.*

En introduisant cette valeur particulière de  $L$  dans l'équation (15), on obtient  $N_{\max.}$  :

$$N_{\max.} = \frac{1}{e} \left( \sqrt{r^2 + \frac{e \pi (R^2 - r^2)}{2e}} + \sqrt{R^2 - \frac{e \pi (R^2 - r^2)}{2e}} - R - r \right)$$

ou

$$\underline{\underline{N_{\max.} = \frac{1}{e} (\sqrt{2(R^2 + r^2)} - R - r)}}. \quad (17)$$

Si l'on reprend l'exemple numérique et qu'on introduit les valeurs de  $R$ ,  $r$  et  $e$  dans les formules (16) et (17), on trouve que le nombre de tours de développement du ressort est maximum pour :

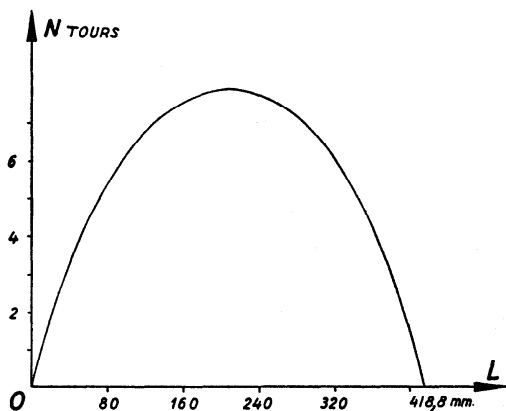


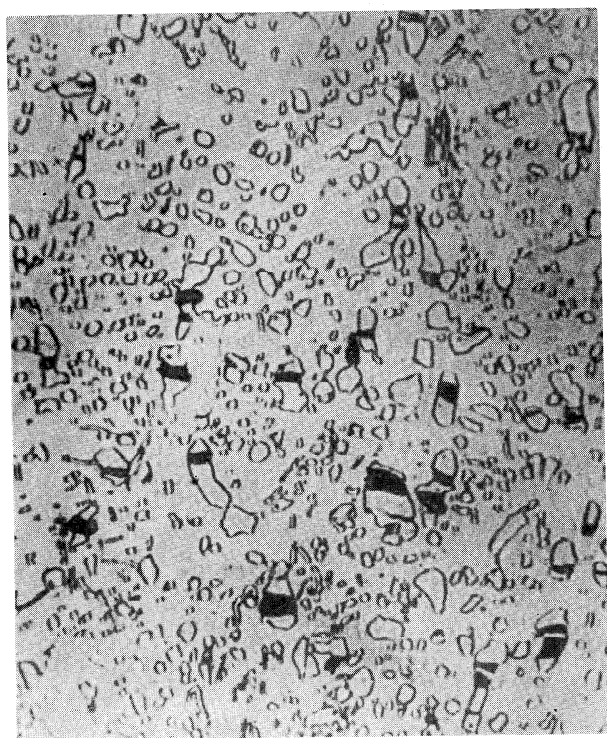
Fig. 83

$$L = \pi \frac{3^2 - 1^2}{2 \cdot 0,06} = 209,4 \text{ mm.}$$

On obtient :

$$N_{\max.} = 7,87 \text{ tours.}$$

L'allure de la courbe (fig. 83) indique qu'il s'agit bien ici d'un maximum, ce qu'on aurait pu d'ailleurs vérifier par le calcul, en contrôlant que la dérivée seconde  $\frac{d^2N}{dL^2}$  est bien négative pour  $L = 209,4$ .



Pl. V, fig. 78a





Aux environs du maximum, la longueur  $L$  du ressort peut varier passablement sans que le nombre de tours soit fortement diminué. Mais en modifiant  $L$ , on change la valeur du moment élastique  $M$  qui est une fonction linéaire de  $\frac{1}{L}$ .

**Calcul de l'épaisseur du ressort.** — Nous pouvons déterminer l'épaisseur du ressort correspondant au développement maximum en admettant un certain rapport entre cette épaisseur et le rayon (ou le diamètre) de la bonde. Ce rapport a une grande importance puisqu'il détermine, en partie, les tensions subies par les fibres du ressort enroulé autour de la bonde.

Posons  $r = ae$ , le coefficient  $a$  ayant en pratique une valeur voisine de 16. L'équation (17) devient :

$$N_{\max.} = N = \frac{1}{e} \left( \sqrt{2(R^2 + a^2 e^2)} - R - ae \right),$$

d'où nous tirons :

$$e = R \frac{N + a - \sqrt{2N^2 + 4aN}}{a^2 - N^2 - 2aN}. \quad (18)$$

En pratique, les calculs s'effectuent dans l'ordre suivant :  $R$  est donné et  $N_{\max.}$  est imposé ; la valeur  $a$  du rapport entre le rayon de la bonde et l'épaisseur du ressort est admise.

Nous pouvons calculer  $e$  d'après l'équation (18) et aussitôt  $r = ae$ . Nous avons ainsi tous les éléments permettant de déterminer  $L$  d'après l'équation (16).

Nous n'avons pas imposé pour la bonde la condition  $r = \frac{R}{3}$ . Nous croyons préférable de réaliser les conditions dans lesquelles le ressort n'est pas sollicité de façon exagérée, c'est-à-dire de choisir d'abord un rapport convenable entre le rayon de la bonde et l'épaisseur du ressort.

Les calculs au moyen des formules (16) et (18) peuvent être abrégés en les exécutant d'avance pour certaines valeurs de  $R$  et en établissant des tables pour différentes valeurs de  $a$ .

En admettant  $R = 1$ , R. Lavest, le successeur de Jules Grossmann à la direction de l'Ecole d'horlogerie du Locle, a établi les tables reproduites à la page suivante, qui peuvent rendre de grands services aux praticiens.

TABELLE POUR  $N_{\max}$  et  $R = 1$

$R =$  Rayon intérieur du barillet       $d =$  diamètre de la bonde

| $N$            | $a = 16$ (normal) |        |        | $a = 15$ |        |        | $a = 14$ |        |        |
|----------------|-------------------|--------|--------|----------|--------|--------|----------|--------|--------|
|                | $e$               | $d$    | $L$    | $e$      | $d$    | $L$    | $e$      | $d$    | $L$    |
| 5              | 0,0249            | 0,7968 | 53,085 | 0,0258   | 0,7752 | 51,654 | 0,0269   | 0,7532 | 50,110 |
| $5\frac{1}{4}$ | 0,0241            | 0,7698 | 55,607 | 0,0253   | 0,7594 | 53,103 | 0,0264   | 0,7380 | 51,470 |
| $5\frac{1}{2}$ | 0,0239            | 0,7648 | 56,088 | 0,0248   | 0,7452 | 54,452 | 0,0259   | 0,7248 | 52,710 |
| $5\frac{3}{4}$ | 0,0235            | 0,7520 | 57,361 | 0,0244   | 0,7316 | 55,800 | 0,0258   | 0,7226 | 52,920 |
| 6              | 0,0231            | 0,7382 | 58,791 | 0,0240   | 0,7200 | 56,970 | 0,0250   | 0,7000 | 55,107 |
| $6\frac{1}{4}$ | 0,0227            | 0,7256 | 60,133 | 0,0237   | 0,7104 | 57,966 | 0,0243   | 0,6806 | 57,145 |
| $6\frac{1}{2}$ | 0,0225            | 0,7120 | 61,619 | 0,0231   | 0,6930 | 59,828 | 0,0240   | 0,6720 | 58,060 |
| $6\frac{3}{4}$ | 0,0219            | 0,7018 | 62,648 | 0,0227   | 0,6804 | 61,253 | 0,0236   | 0,6608 | 59,300 |
| 7              | 0,0215            | 0,6888 | 64,260 | 0,0224   | 0,6706 | 62,373 | 0,0232   | 0,6496 | 60,563 |
| $7\frac{1}{2}$ | 0,0209            | 0,6690 | 66,800 | 0,0216   | 0,6490 | 65,000 | 0,0224   | 0,6280 | 63,100 |
| 8              | 0,0203            | 0,6490 | 69,400 | 0,0210   | 0,6290 | 67,600 | 0,0217   | 0,6090 | 65,600 |
| 9              | 0,0192            | 0,6130 | 74,200 | 0,0198   | 0,5940 | 72,300 | 0,0205   | 0,5740 | 70,400 |
| 10             | 0,0182            | 0,5820 | 79,100 | 0,0188   | 0,5630 | 77,100 | 0,0194   | 0,5430 | 75,000 |
| 11             | 0,0173            | 0,5540 | 83,800 | 0,0178   | 0,5350 | 81,700 | 0,0184   | 0,5160 | 79,600 |
| 12             | 0,0165            | 0,5290 | 88,400 | 0,0170   | 0,5110 | 86,300 | 0,0175   | 0,4910 | 84,100 |

Si un constructeur veut déterminer les valeurs  $e$  et  $L$  d'un ressort qui, dans un barillet de rayon  $R = 6$  mm, donne un nombre  $N_{\max.} = 7$  tours de développement, et cela en cherchant à réaliser un rapport  $\frac{r}{e} = a = 16$ , il trouve dans la table pour  $a = 16$  :

$$N = 7, \quad e = 0,0215, \quad 2r = d = 0,6888, \quad L = 64,260.$$

Mais ces valeurs correspondent à  $R = 1$ . Pour  $R = 6$  mm, il aura :

$$e = 0,0215 \cdot 6 = 0,129 \text{ mm},$$

$$d = 0,6888 \cdot 6 = 4,1328 \text{ mm},$$

$$L = 64,26 \cdot 6 = 385,56 \text{ mm}.$$

**Insuffisance de la solution théorique.** — Les formules permettant de calculer le nombre de tours de développement, la longueur et l'épaisseur du ressort ont été établies à partir d'hypothèses dont certaines ne correspondent pas tout à fait à la réalité. Nous avons supposé : 1° que les spires du ressort armé ou désarmé dans le barillet ont la forme circulaire, 2° qu'elles s'appliquent parfaitement les unes contre les autres, sans tenir compte des imperfections de la lame et de la présence d'un lubrifiant, 3° que la spire extérieure s'applique bien au tambour lorsque le ressort est désarmé dans le barillet, 4° que les spires considérées constituent tout le ressort, sans les portions  $AB$  (fig. 81) et  $CD$  (fig. 82) qui rattachent les spires au tambour et à la bonde, 5° que l'épaisseur du ressort est la même tout le long de la lame. Ces conditions ne sont pas remplies rigoureusement. Il n'est donc pas étonnant que les mesures effectuées sur des ressorts ne correspondent pas tout à fait aux résultats donnés par les formules. Le nombre de tours de développement d'un ressort est généralement inférieur à ce qu'indique la théorie.

Le praticien fera bien, en utilisant les tables de R. Lavest, d'ajouter au développement qu'il désire un certain nombre de tours ; d'après G.-A. Berner :

$$1 \text{ tour pour } N \leq 6 \quad \text{et} \quad 1 \frac{1}{2} \text{ tour pour } N > 6.$$

Ainsi, dans l'exemple donné plus haut où nous supposons  $R = 6$  mm et  $N = 7$ , nous avons utilisé les données de la table correspondant à  $N = 7$  pour  $a = 16$  ; c'était la solution théorique. En pratique, il aurait mieux valu prendre les données de la même table correspondant à  $N = 8,5$ , c'est-à-dire, pour  $R = 1$  :

$$e = 0,0197 \text{ (moyenne entre 0,0203 et 0,0192),}$$

$$r = 0,3155 \left( \text{moyenne entre } \frac{0,6490}{2} \text{ et } \frac{0,6130}{2} \right),$$

$$L = 71,8 \quad (\text{moyenne entre 69,4 et 74,2}).$$

Les valeurs réelles seraient :

$$e = 0,0197 \cdot 6 = 0,1182 \text{ mm}$$

$$r = 0,3155 \cdot 6 = 1,893 \text{ mm}$$

$$d = 3,786 \text{ mm}$$

$$L = 71,8 \cdot 6 = 430,8 \text{ mm.}$$

**Egalisation du moment élastique du ressort.** — On cherche un ressort dont le moment élastique varie peu pendant la détente. La différence entre les moments extrêmes est atténuée si l'on augmente autant que possible le développement disponible dont on n'utilisera qu'une petite partie.

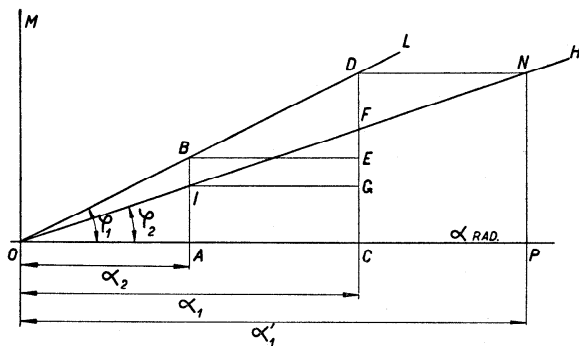


Fig. 84

Le moment élastique d'un ressort armé d'un angle  $\alpha$  radians est :

$$M = \frac{Ee^3h}{12L} \alpha.$$

$M$  est donc une fonction linéaire de  $\alpha$  et la fonction  $M = f(\alpha)$  est représentée par une droite  $OL$  (fig. 84). On peut écrire :

$$M = K\alpha,$$

en posant :

$$K = \frac{Ee^3h}{12L}.$$

On a :

$$K = \frac{M}{\alpha} = \text{tg } \varphi_1.$$

Pour un nombre de tours de développement donné correspondant aux angles d'armage  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , la différence entre les moments extrêmes est, d'après la figure :

$$CD - AB = ED = (\alpha_1 - \alpha_2) \operatorname{tg} \varphi_1.$$

Pour diminuer la valeur de cette différence, il faut essayer d'abaisser  $\operatorname{tg} \varphi_1$ , c'est-à-dire la constante  $K$ .

On y parviendrait, par exemple, en augmentant la longueur  $L$ ; nous savons qu'aux environs de  $N_{\max.}$ , on peut augmenter  $L$  sans affecter sérieusement le nombre de tours. On aurait alors pour représenter  $M = f(\alpha)$  une droite moins inclinée telle que  $OH$ , et la différence des moments pour une détente du ressort égale à  $\alpha_1 - \alpha_2$  serait représentée par  $GF$  qui est plus petit que  $ED$ .

Il peut y avoir, dans les modifications de la valeur de  $K$ , des possibilités d'atténuer la variation du moment élastique d'un ressort; toutefois il ne faut jamais oublier qu'en modifiant  $K$ , on modifie aussi  $M$ . Ainsi, en augmentant  $L$ , on rend le moment moins variable, mais en même temps on diminue sa valeur absolue, à moins de choisir, si on le peut, les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  de telle sorte que :

$$K(\alpha_1 - \alpha_2) = K'(\alpha'_1 - \alpha'_2).$$

Dans la figure, on aurait  $CD = PN$ .

Pour régulariser le moment du ressort moteur, on a introduit un moment résistant — une sorte de frein — augmentant en même temps que celui du ressort, de sorte que la différence entre les deux moments reste constante. La résistance était créée par un ressort-frein agissant en sens inverse du ressort moteur, lorsque celui-ci était tendu, puis, au fur et à mesure de la détente, la résistance du frein diminuait et, à la fin de la détente, le ressort travaillait dans le même sens que la force motrice. C'est le principe du stackfreed, une construction très ancienne, inutilisée aujourd'hui.

Une autre solution, également délaissée, est fondée sur la considération que, dans un ressort fortement armé, ce sont surtout les spires extérieures qui travaillent, tandis qu'à la fin de la détente, ce sont les spires intérieures. Pour diminuer la différence entre les moments extrêmes, on a fait des ressorts dont l'épaisseur augmentait au fur et à mesure qu'on approchait de la bonde (ressort en fouet).

La solution du stackfreed est à rejeter parce qu'elle correspond à une perte d'énergie due à l'augmentation du frottement, laquelle provoque d'autre part une usure plus grande des pièces.

Le ressort d'épaisseur variable n'est pas recommandable parce que les spires les plus déformées sont aussi les plus épaisses ; on multiplie ainsi les risques de rupture puisqu'en augmentant l'épaisseur, on renforce l'allongement et la tension des fibres extérieures, qui sont déjà beaucoup trop grands.

**La fusée.** — Il existe un dispositif qui n'a pas les inconvénients que nous venons de signaler : la fusée.

La fusée est un corps de révolution dont le profil est à peu près parabolique et qui est entaillé d'une rainure hélicoïdale (fig. 85).

Le ressort est enfermé dans le barillet *A* qui ne porte aucune denture. Une chaîne (ou une corde) *B* accrochée au tambour du barillet s'enroule et se déroule sur le barillet et en même temps dans la rainure de la fusée *C* ; l'arbre de celle-ci porte une roue dentée *D* qui transmet l'énergie

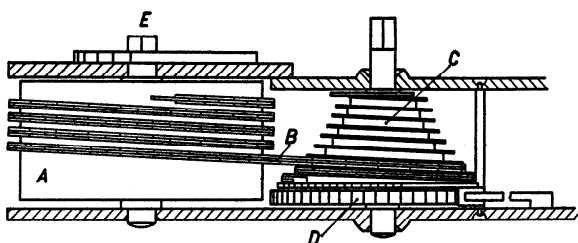


Fig. 85

du ressort à l'organe régulateur à travers le rouage et l'échappement. L'arbre *E* du barillet est fixe ; l'arbre de la fusée est terminé par un carré destiné à faciliter le remontage. Lorsqu'on remonte la montre, on fait tourner l'arbre de la fusée ; la chaîne s'enroule alors sur la fusée et se déroule sur le barillet, mais en entraînant celui-ci et en tendant le ressort autour de la bonde fixe. Quand le ressort est remonté, la chaîne atteint la fusée là où son rayon est le plus petit ; la force du ressort qui est considérable agit, par la chaîne, au bout d'un petit bras de levier. Quand le ressort se détend, la chaîne s'enroule sur le barillet et se déroule sur la fusée ; la force qui tend la chaîne diminue, tandis que le rayon de la fusée au bout duquel elle agit augmente. Si la forme de la fusée est correcte, le moment de la force du ressort par rapport à l'axe de la fusée reste constant.

Au moyen d'un levier et d'un poids mobile, on peut vérifier si le moment du ressort par rapport à l'axe de la fusée reste le même pendant toute la détente de la fusée.

La fusée *C* qui doit tourner dans les deux sens est sur le même arbre que la roue *D* qui ne tourne que dans un sens. La fusée et la roue *D* libre sur l'arbre sont reliées par un encliquetage.

**L'entretien de la force motrice pendant le remontage.** — Dans les montres à fusée, comme dans les horloges à poids, la force utilisée pour le remontage neutralise la force du ressort de barillet ; la roue *D*, le rouage, l'échappement n'ont plus aucune énergie à transmettre et le balancier, ne recevant plus d'impulsions, s'arrête.

Pour éviter cet inconvénient, on utilise un dispositif comprenant un ressort qui exerce son action sur la roue *D* pendant le remontage du ressort de barillet.

Dans la figure 86, le ressort d'entretien 4 agit constamment sur la roue de transmission 3 ; le rochet 2 et le cliquet 5 ne permettent à la roue 3 qu'un mouvement dans le sens de la flèche. Ainsi, pendant le remontage, la force motrice provenant du barillet est remplacée par la force du ressort 4. Dans cette figure, 1 représente la fusée, 6 le pignon de l'indicateur de développement et 7 la roue portant l'aiguille indicatrice du développement du ressort moteur.

Les avantages de la fusée sont évidents ; ils sont un peu contrebalancés par quelques inconvénients. Ce mécanisme est coûteux, délicat et encombrant. Cependant il est encore employé dans les chronomètres de marine où l'isochronisme des oscillations est particulièrement important.

**Forme de la fusée.** — Cherchons à déterminer la forme

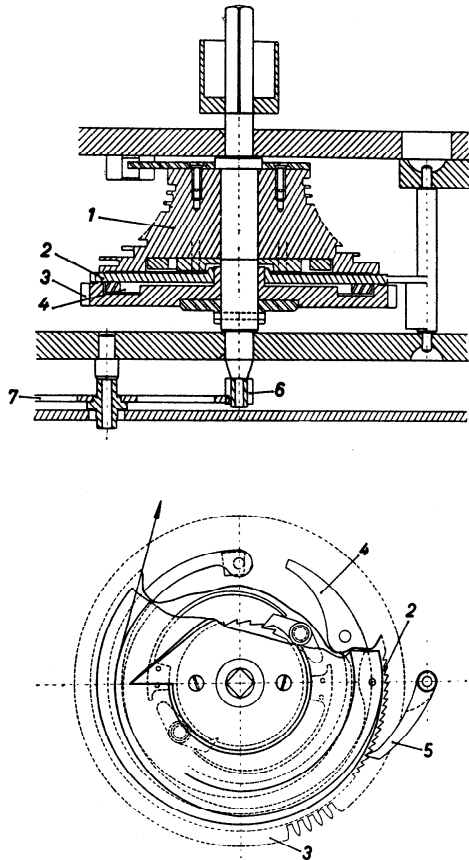


Fig. 86

que doit avoir le profil  $AB$  (fig. 87) pour que le moment du ressort soit égalisé. Un point  $P$  de ce profil est caractérisé par ses coordonnées  $x$  et  $y$  dont la signification est indiquée par la figure.

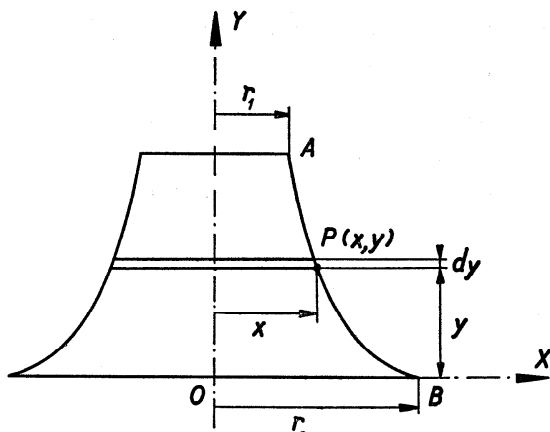


Fig. 87

Envisageons une portion  $dS$  de la surface de la fusée, portion que nous assimilons à la surface latérale d'un cylindre de hauteur infiniment petite  $dy$ , et dont la base, de rayon  $x$ , est perpendiculaire à l'axe de révolution  $Oy$ . Nous avons :

$$dS = 2\pi x dy.$$

La surface totale de la fusée est :

$$S = \int dS = 2\pi \int x dy.$$

La chaîne a la largeur  $e$ . Si les spires de la chaîne se touchent, la longueur  $l$  de la chaîne enroulée sur la fusée est :

$$l = \frac{2\pi}{e} \int x dy.$$

La force  $f$  qui agit sur la chaîne est proportionnelle à l'angle d'armage du ressort ; nous pouvons poser :

$$f_0 = Kl_0,$$

en désignant par  $l_0$  la longueur de la chaîne pour le plus grand rayon de fusée et par  $K$  une constante.

Par rapport à l'axe de la fusée, le moment de la force  $f_0$  est :

$$M_0 = Kl_0 r_0.$$



Quand la chaîne s'est enroulée de la longueur  $l$  sur la fusée, la longueur de la chaîne est  $l_0 + l$ ; la force s'est accrue de  $Kl$  puisque  $l$  est aussi la longueur de chaîne déroulée du barillet, longueur proportionnelle à l'angle dont a tourné le barillet.

Le moment  $M$  de la force  $f$  est :

$$M = K (l_0 + l) r .$$

Nous voulons avoir  $M = M_0$ , soit :

$$(l_0 + l) r = l_0 r_0 .$$

Puisque  $r = x$ , nous avons :

$$(l_0 + l) x = l_0 r_0$$

ou

$$\frac{l_0 r_0}{x} = l_0 + \frac{2\pi}{e} \int x dy .$$

Différentions :

$$-l_0 r_0 \frac{dx}{x^2} = \frac{2\pi}{e} x dy ,$$

d'où :

$$dy = -\frac{l_0 r_0 e}{2\pi} \frac{dx}{x^3} ,$$

soit :

$$y = -\frac{l_0 r_0 e}{2\pi} \int \frac{dx}{x^3} = -\frac{l_0 r_0 e}{2\pi} \left( -\frac{1}{2x^2} \right) + C$$

ou

$$y = \frac{l_0 r_0 e}{4\pi x^2} + C .$$

Déterminons la constante d'intégration  $C$  en considérant que, pour  $y = 0$ ,  $x = r_0$ . Nous avons :

$$C = -\frac{l_0 r_0 e}{4\pi} \frac{1}{r_0^2}$$

et obtenons finalement :

$$\underline{\underline{y = \frac{l_0 r_0 e}{4\pi} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{r_0^2} \right)}} . \quad (19)$$

Cette équation est celle d'une hyperbole cubique.

Pour des valeurs déterminées de  $r_0$  et de  $e$ , la valeur de  $y$  en fonction de  $x$  variera avec  $l_0$ . Pour des valeurs de plus en plus grandes de  $l_0$ , les valeurs de  $y$  augmentent et la courbe est moins accentuée; la courbe 1 (fig. 88) correspond à une valeur de  $l_0$  plus petite que celle qui a été utilisée dans le calcul des points de la courbe 2.

Le facteur  $K$  qui intervient dans l'expression de  $f$  est caractéristique pour un ressort donné; en changeant le ressort, nous modifions  $K$ ,  $f$  et

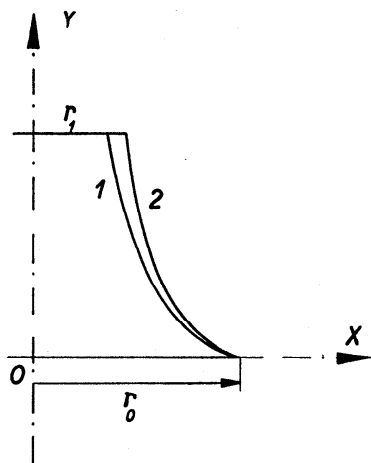


Fig. 88

le moment constant de la fusée. Mais si nous ne modifions pas  $l_0$ , le profil de la fusée n'aura pas besoin d'être changé.

En pratique, il ne s'agit pas de modifier un profil de fusée; il faut, au contraire, adapter le moment du ressort au profil de la fusée à disposition, à condition toutefois que ce profil soit une hyperbole cubique satisfaisant à l'équation (19). Nous y parviendrons en modifiant  $l_0$ , c'est-à-dire la tension du ressort qui correspond à  $l = 0$ , au moment où, au remontage, la chaîne commence à s'enrouler autour de la fusée. Nous ferons varier  $l_0$  jusqu'à ce que, au moyen du levier, nous constations que les moments pour  $x = r_0$  et  $x = r_1$  sont égaux.

## CHAPITRE V

### LE ROUAGE

#### RAPPORT DES VITESSES ET NOMBRES DE DENTS

**Rappel des fonctions du rouage.** — Dans le chapitre III, nous avons indiqué les deux fonctions que le rouage d'une montre ou d'une pendule assume ; il doit :

1° transmettre l'énergie du barillet à l'échappement,

2° compter les oscillations de l'organe régulateur (pendule ou balancier) et en indiquer le nombre au moyen d'aiguilles se déplaçant devant un cadran.

La seconde fonction peut être remplie si les vitesses des roues portant les aiguilles sont rigoureusement déterminées, c'est-à-dire si les nombres de dents ne sont pas choisis arbitrairement.

Pour que la première fonction du rouage, celle qui consiste à transmettre l'énergie, puisse être convenablement exécutée, certaines conditions que nous préciserons au chapitre suivant doivent être satisfaites.

Les deux fonctions du rouage doivent être remplies simultanément.

**Transmission du mouvement d'un arbre à un autre.** — Pour transmettre le mouve-

ment d'un arbre à un autre, nous imaginerons un système très simple : deux roues sans aspérités (fig. 89), mais dont les périphéries sont tellement près l'une de l'autre que la première roue entraîne la seconde.

Supposons que l'entraînement se produise *sans glissement* de sorte que le point A, qui fut point de contact, se déplace sur la roue  $O_1$  de A en B et, en même temps, sur la roue  $O_2$  de A en C. La roue  $O_1$  a tourné d'un angle  $\alpha$  radians tandis que la

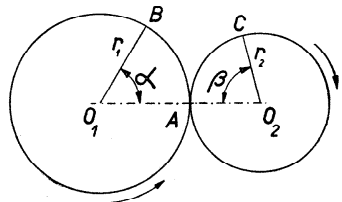


Fig. 89

roue  $O_2$  a tourné de l'angle  $\beta$  radians. Puisque le mouvement a lieu sans glissement, nous avons :

$$\widehat{\text{arc } AB} = \widehat{\text{arc } AC}$$

ou

$$r_1 \alpha = r_2 \beta,$$

si  $r_1$  et  $r_2$  représentent les rayons des deux roues. Donc :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Si les angles  $\alpha$  et  $\beta$  ont été décrits en une seconde, ils désignent les vitesses angulaires  $\omega_1$  et  $\omega_2$  des deux roues :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (20)$$

*Les vitesses angulaires de deux roues s'entraînant par friction sans glissement sont dans le rapport inverse des rayons.*

La transmission du mouvement au moyen de poulies et de courroies obéit à la même loi quand les courroies entraînent les poulies sans glissement.

Les points  $A$  et  $A'$  (fig. 90) ne sont plus en contact, mais reliés par le brin  $A'A$  de la courroie. Quand, après un certain temps, le point  $A$  est arrivé en  $B$ , le point  $A'$  est arrivé en  $C$ , et nous avons, comme auparavant :

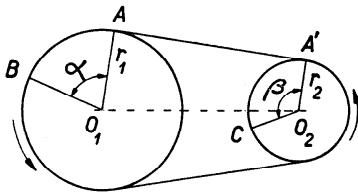


Fig. 90

$$\widehat{\text{arc } AB} = \widehat{\text{arc } A'C}$$

ou

$$r_1 \alpha = r_2 \beta$$

et, par suite :

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

La vitesse angulaire est souvent donnée en tours par minute, tandis que  $\omega_1$  et  $\omega_2$  sont exprimées en radians par seconde. Nous aurons donc :

$$\omega_1 = \frac{2\pi n_1}{60}, \quad \omega_2 = \frac{2\pi n_2}{60},$$

soit :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2},$$

de sorte que la formule (20) peut aussi être écrite sous la forme :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}. \quad (21)$$

*Les nombres de tours par minute de deux roues s'entraînant par friction (avec ou sans courroie) et sans glissement sont dans le rapport inverse des rayons.*

Les roues de la figure 89 tournent en sens inverse; celles de la figure 90, dans le même sens. Si les courroies sont croisées (fig. 91), les roues n'ont pas le même sens de rotation.

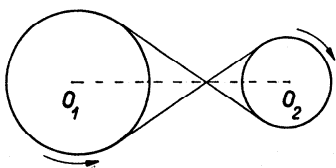


Fig. 91

**Les roues dentées: le rayon primitif et le pas.** — Dans le rouage d'une montre ou d'une pendule, le rapport des vitesses doit être absolument exact si l'on veut que les aiguilles indiquent l'heure juste. On ne peut pas se contenter d'un entraînement par friction à cause du glissement toujours possible.

On évite à coup sûr le glissement en munissant la périphérie des roues de dents (fig. 92) séparées par un creux ou vide assez grand pour qu'une dent de l'autre roue y trouve place.

Les roues dentées sont ainsi destinées à remplacer les cylindres lisses s'entraînant par friction. Les circonférences *ab* et *cd* de ces cylindres sont les *circonférences primitives* des deux roues; elles sont tangentes en *A*.

On voit d'emblée que le *diamètre primitif* n'est pas le *diamètre total* de la circonférence passant par l'extrémité des dents.

Le diamètre total d'une roue dentée est mesurable au moyen d'in-

struments tels que micromètre, microscope, projecteur de profils, etc.; le diamètre primitif ne l'est pas.

La distance mesurée sur la circonférence primitive entre deux points homologues de deux dents consécutives est le *pas circonférentiel* ou simplement le *pas* de la roue. Deux roues engrenant l'une dans l'autre doivent

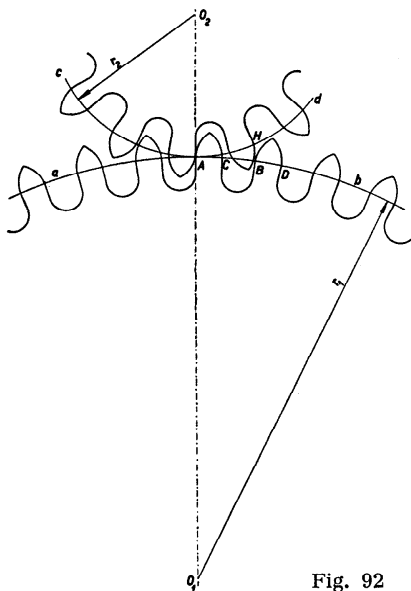


Fig. 92

avoir le même pas que l'on peut appeler le *pas de l'engrenage* (symbole  $p$ ). On a (fig. 92) :

$$p = \widehat{AB} = \widehat{CD} = \widehat{AH}.$$

Soient  $r_1$  et  $r_2$  les rayons primitifs de deux roues dont les nombres de dents sont  $z_1$  et  $z_2$ . Pour la première roue, on a :

$$2\pi r_1 = pz_1,$$

d'où :

$$p = \frac{2\pi r_1}{z_1}.$$

Pour la seconde roue, on a de même :

$$p = \frac{2\pi r_2}{z_2}.$$

Donc :

$$\frac{2\pi r_1}{z_1} = \frac{2\pi r_2}{z_2}$$

ou

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (22)$$

*Les rayons primitifs de deux roues engrenant l'une dans l'autre sont dans la même rapport que les nombres de dents.*

Dans les montres, le balancier a un mouvement très rapide, tandis que le barillet tourne très lentement; la vitesse des roues doit donc augmenter rapidement du barillet à l'échappement, c'est-à-dire que,

d'après la formule (21), les rapports  $\frac{r_1}{r_2}$  doivent être grands. Pour réaliser

de grands rapports de vitesses, il y a lieu d'utiliser de grandes roues engrenant dans des roues beaucoup plus petites (jusqu'à 10 ou 12 fois) que l'on appelle *pignons*. Les horlogers emploient souvent le mot *ails* pour désigner les dents des pignons.

**La vitesse imposée à certaines roues d'un rouage de montre ou de pendule.** — Les arbres de certaines roues du rouage portent les aiguilles des minutes et des secondes; leur vitesse est donc imposée; la roue portant l'aiguille des minutes doit faire un tour en une heure, c'est-à-dire  $\frac{1}{60}$  de tour par minute, tandis que la roue qui porte l'aiguille des secondes doit faire un tour par minute.

Les roues du rouage n'ont pas un mouvement uniforme ; elles tournent brusquement d'un certain angle, différant de roue à roue (seules les roues solidaires du même arbre tournent du même angle), puis s'arrêtent un moment après lequel elles font un nouveau saut de même ampleur. Dans la plupart des montres les sauts se suivent à une durée d'alternance. Dans celles qui sont munies d'un échappement à détente, il n'y a qu'un saut par période. Le temps qui s'écoule entre deux sauts consécutifs comprend la durée du saut et celle du repos ; la première durée est beaucoup plus courte que la seconde.

Malgré ce mouvement saccadé, les roues ont une vitesse angulaire constante si l'on envisage des périodes plus longues que la durée d'une alternance ; ainsi le nombre de tours par minute d'une roue dentée faisant partie d'un rouage de montre est constant.

En combinant les formules (21) et (22), on obtient une nouvelle formule qui sera utile pour le calcul des nombres de dents des roues du rouage des montres et des pendules :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (23)$$

*Les nombres de tours exécutés en une minute par des roues qui s'engrènent sont dans le rapport inverse des nombres de dents.*

La formule (23) ne subit aucune modification si  $n$  désigne le nombre de tours exécutés en une seconde ou en telle autre durée plus grande que celle d'une alternance, pourvu que cette durée soit la même pour les deux roues.

#### **Calcul des nombres de dents du barillet et du pignon des minutes. —**

Le constructeur d'une montre cherche à utiliser un ressort ayant un grand nombre de tours de développement ; cependant, pour avoir le moment élastique aussi constant que possible, il ne permet au ressort qu'un développement restreint pendant la durée normale de la marche de la montre. Cette durée normale est de 24 heures pour les montres qu'on remonte tous les jours, mais la montre doit pouvoir marcher plus de 24 heures sans être remontée.

Le constructeur peut choisir la vitesse angulaire du barillet, c'est-à-dire le nombre de tours en 24 heures par exemple.

Dans les montres munies d'un arrêtage à 4 tours (arrêtage à croix de Malte par exemple), la durée de marche sera de 32 heures si l'on impose au barillet une vitesse de 3 tours en 24 heures. Soient  $n_1$  et  $n_2$  les nombres de tours exécutés par le barillet et le pignon des minutes en 24 heures :

$$n_1 = 3, \quad n_2 = 24.$$

Soient  $z_1$  et  $z_2$  les nombres de dents du barillet et du pignon des minutes. On a, d'après (23) :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{3}{24} = \frac{1}{8},$$

d'où :

$$z_1 = 8z_2.$$

Cette équation à deux inconnues admet une infinité de solutions entières et positives. Mais dans la montre les nombres de dents ne peuvent varier qu'entre des limites assez serrées, imposées par la place disponible et par la nécessité d'avoir des dents assez solides pour supporter les efforts à transmettre. Le nombre des dents des pignons dépasse rarement 12 et ne descend pas au-dessous de 6 ; quant au nombre de dents des roues, il dépasse rarement 120.

Suivant les cas, on admettra l'une ou l'autre des solutions suivantes :

| $z_2$ | $z_1$ |
|-------|-------|
| 6     | 48    |
| 7     | 56    |
| 8     | 64    |
| 9     | 72    |
| 10    | 80    |
| 12    | 96    |

On évite autant que possible les pignons « peu nombrés », c'est-à-dire dont le nombre de dents est inférieur à 8, parce que ces pignons sont peu favorables pour la transmission uniforme de la force.

Les solutions les plus pratiques sont, pour les petites montres :

$$\begin{aligned} z_2 &= 8, & z_1 &= 64; \\ z_2 &= 9, & z_1 &= 72; \end{aligned}$$

pour les grandes montres :

$$\begin{aligned} z_2 &= 10, & z_1 &= 80; \\ z_2 &= 12, & z_1 &= 96. \end{aligned}$$

**Rapport des vitesses angulaires dans un train d'engrenages.** — Pour réaliser un très grand rapport de vitesse entre deux arbres, il faut augmenter le nombre des dents de la roue ou diminuer celui des dents du



pignon ou faire ces deux modifications simultanément. Il arrive qu'on soit amené à envisager des nombres de dents trop grands pour la roue ou trop petits pour le pignon. Pour remédier à cet inconvénient, on intercale un ou plusieurs arbres dont chacun porte une roue et un pignon : on obtient ainsi un *train d'engrenages*.

Dans la figure 93, les roues et les pignons sont représentés par leurs circonférences primitives. Soient  $z_1, z_3, z_5$ , etc... les nombres de dents des roues ;  $z_2, z_4, z_6$ , etc... les nombres de dents des pignons et  $n_1, n_2, n_3$ , etc... les nombres de tours par minute des arbres  $O_1, O_2, O_3$ , etc...

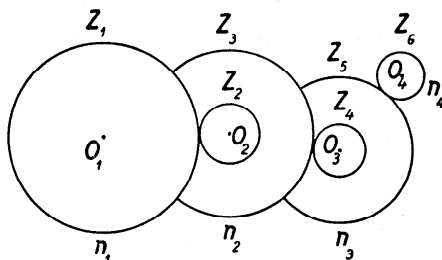


Fig. 93

On aura une suite d'engrenages qu'on désignera par les nombres de dents de la roue et du pignon engagés. Ici on a l'engrenage  $z_1 - z_2$ , l'engrenage  $z_3 - z_4$ , l'engrenage  $z_5 - z_6$ .

Les relations suivantes découlent de la formule (23) :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad \frac{n_2}{n_3} = \frac{z_4}{z_3}, \quad \frac{n_3}{n_4} = \frac{z_6}{z_5}.$$

En multipliant ces équations membre à membre, on obtient, après simplification, le rapport des vitesses angulaires du premier et du dernier arbre :

$$\frac{n_1}{n_4} = \frac{z_2 z_4 z_6}{z_1 z_3 z_5}. \quad (24)$$

*Le rapport entre les nombres de tours exécutés en une minute ou en tout autre intervalle de temps par le premier et le dernier arbre d'un train d'engrenages est égal au rapport entre le produit des nombres de dents des pignons et le produit des nombres de dents des roues.*

#### Engrenage barillet-pignon des minutes dans la montre 8 jours. —

Dans les montres 8 jours, destinées à être remontées une fois par semaine, le ressort moteur devrait être très long si le barillet engrenait directement dans le pignon des minutes ; son développement atteindrait jusqu'à 14 tours.

Obligeons le barillet à exécuter 4 tours en 8 jours, c'est-à-dire en 192 heures, ce qui fait un tour en 48 heures ; le pignon des minutes doit faire un tour en une heure. Le rapport des vitesses ou des nombres de tours en un temps déterminé est 1 : 48. Le rapport entre les nombres de dents du barillet et du pignon des minutes doit être 48 : 1.

Nous ne pouvons guère faire un pignon ayant moins de 6 dents. Pour un pignon de 6 dents, il faut une roue de  $6 \cdot 48 = 288$  dents. Ce nombre est trop grand pour les roues utilisées en horlogerie ; il a des inconvénients dont nous parlerons plus tard. Pour obtenir des nombres de dents acceptables, nous intercalerons un arbre entre le barillet et le pignon des minutes et nous obtiendrons un train d'engrenages à 3 arbres  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$  (fig. 94).

Nous avons :

$$n_1 = \frac{1}{48} \text{ tour/heure,}$$

$$n_3 = 1 \text{ tour/heure,}$$

d'où :

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{1}{48}.$$

Comme :

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{1}{48},$$

nous aurons :

$$z_1 z_3 = 48 z_2 z_4.$$

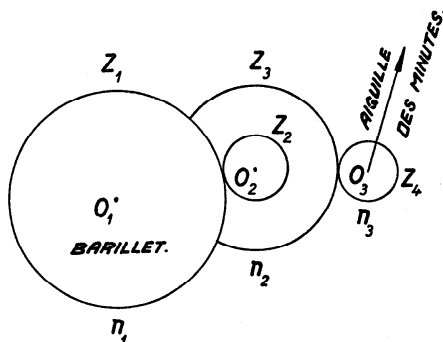


Fig. 94

Les nombres  $z_2$  et  $z_4$  sont petits ; rien ne nous empêche de les choisir et d'obtenir le produit  $z_1 z_3$  des nombres de dents du barillet et de la roue intermédiaire.

Il suffit alors de trouver deux nombres dont le produit est égal à  $z_1 z_3$ . Théoriquement, ce problème a une infinité de solutions ; en pratique, nous ne pouvons envisager que des nombres entiers et positifs compris entre des limites assez rapprochées.

Nous trouverons facilement les nombres qui pourraient convenir en décomposant le produit en facteurs premiers. Supposons  $z_2 = 14$  et  $z_4 = 12$  :

$$z_1 z_3 = 48 \cdot 14 \cdot 12 = 2^4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 2^2 \cdot 3 = 2^7 \cdot 3^2 \cdot 7.$$

Voici deux solutions acceptables :

$$z_1 = 2^5 \cdot 3 = 96, \quad z_3 = 2^2 \cdot 3 \cdot 7 = 84$$

ou

$$z_1 = 2^4 \cdot 7 = 112, \quad z_3 = 2^3 \cdot 3^2 = 72.$$

Les autres solutions :

$$z_1 = 126, \quad z_3 = 64$$

ou

$$z_1 = 128, \quad z_3 = 63$$

sont moins pratiques.

Si nous acceptons la première solution, le train d'engrenages sera caractérisé par les nombres de dents suivants :

$$z_1 = 96, \quad z_2 = 14, \quad z_3 = 84, \quad z_4 = 12.$$

Au moyen de la formule (23), nous pouvons calculer le nombre de tours par heure de la roue intermédiaire :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Puisque  $n_1 = \frac{1}{48}$ , nous avons :

$$n_2 = n_1 \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{48} \cdot \frac{96}{14} = \frac{1}{7},$$

c'est-à-dire que la roue intermédiaire fait un tour en 7 heures.

**Engrenage de la roue motrice (barillet) et du pignon des minutes dans une horloge à poids.** — Dans une horloge à poids moteur, la place disponible pour la descente du poids détermine le nombre de tours dont peut tourner le tambour entre deux remontages consécutifs. En effet, si  $n$  est le nombre de tours du tambour de rayon  $r$  pendant que le poids descend d'une hauteur  $h$ , nous aurons :

$$h = 2\pi r n,$$

soit :

$$n = \frac{h}{2\pi r}.$$

Si l'horloge doit marcher  $a$  heures entre deux remontages consécutifs, le pignon des minutes doit faire  $a$  tours pendant que le tambour en fait  $n$ .

Le rapport  $\frac{n}{a}$  est généralement petit; dans une horloge à remontage mensuel, le nombre d'heures de marche est au moins égal à  $33 \cdot 24 = 792$ .

Supposons, pour fixer les idées,  $h = 1000$  mm et  $r = 15$  mm. Nous aurons :

$$n = \frac{1000}{2\pi \cdot 15} \cong 10,6 \text{ tours.}$$

Le rapport des vitesses est :

$$\frac{10,6}{792} \cong \frac{1}{75}.$$

Le tambour fait un tour en 75 heures.

Nous ne pouvons pas réaliser le rapport 1 : 75, qui est le rapport des vitesses entre la roue motrice (barillet) et le pignon des minutes,

uniquement au moyen d'une roue et d'un pignon. Nous sommes obligés d'intercaler un arbre, c'est-à-dire une roue et un pignon et nous avons un cas semblable à celui que nous venons de traiter à propos de la montre 8 jours :

$$\frac{1}{75} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3},$$

d'où :

$$z_1 z_3 = 75 z_2 z_4.$$

Soient :

$$z_2 = 14, \quad z_4 = 12,$$

nous aurons :

$$z_1 z_3 = 75 \cdot 14 \cdot 12 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7.$$

Nous pouvons envisager les solutions suivantes :

$$z_1 = 126, \quad z_3 = 100$$

ou

$$z_1 = 120, \quad z_3 = 105.$$

Pour effectuer les calculs, nous avons simplifié le rapport 10,6 : 792 et l'avons remplacé par 1 : 75. Cette approximation n'a aucune influence sur la vitesse de rotation du pignon et de l'aiguille des minutes, car cette vitesse dépend de la période de l'organe régulateur et du rouage qui relie l'échappement à la roue des minutes.

L'erreur commise en utilisant le rapport simplifié 1 : 75 a une influence sur la durée de marche de l'horloge. Puisque le tambour fait un tour en 75 heures, le poids pourra descendre pendant :

$$75 \cdot 10,6 = 795 \text{ heures.}$$

La durée de marche de l'horloge n'est pas de 33 jours, mais de 33 jours et 3 heures.

Dans l'exemple que nous venons d'exposer, nous avons supposé le poids simplement attaché à la corde qui s'enroule sur le tambour. Si le poids est mouflé, sa descente est deux fois plus lente et il faudrait dans les calculs précédents remplacer  $h$  par  $2h$ .

Dans les exemples qui viennent d'être traités, il est question du *rouage de temps*, c'est-à-dire de celui qui détermine la durée, le « temps » de marche d'une montre ou d'une horloge, tout en servant de véhicule à l'énergie engendrée par un ressort moteur ou par un poids.

**Calcul d'un rouage compteur.** — A partir du pignon des minutes, le rouage est aussi chargé de compter les oscillations de l'organe régulateur et d'indiquer leur nombre au moyen d'aiguilles se déplaçant devant un cadran. Trois aiguilles servent à indiquer les heures, les minutes et

les secondes ; les deux dernières sont fixées sur un arbre du *rouage compteur*. Le rapport des vitesses des deux arbres porteurs des aiguilles des minutes et des secondes doit être 1 : 60, puisque l'aiguille des minutes fait un tour (en une heure) pendant que celle des secondes en fait 60.

Ce rapport ne peut pas être réalisé au moyen d'une roue et d'un pignon. Nous utiliserons un train d'engrenages comprenant la roue des minutes qui engrène dans un pignon intermédiaire dont l'arbre porte la roue intermédiaire ; celle-ci engrène dans le pignon des secondes dont l'arbre porte l'aiguille des secondes (fig. 95). Le pignon intermédiaire porte le nom de *pignon de moyenne* et la roue intermédiaire celui de *roue moyenne*.

Le problème à résoudre pour calculer ce rouage est le même que celui que nous avons résolu pour déterminer le rouage de temps d'une montre 8 jours.

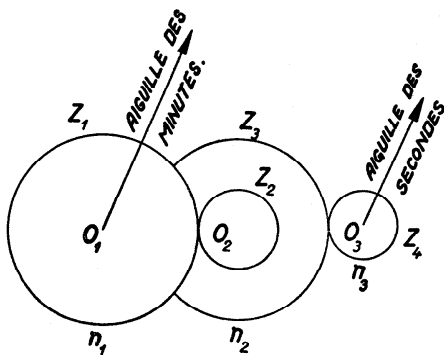


Fig. 95

$z_1$  et  $z_3$  sont les nombres de dents des roues,  $z_2$  et  $z_4$  ceux des pignons,  $n_1$ ,  $n_2$  et  $n_3$  les nombres de tours des arbres  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$ , exécutés en une minute par exemple. Nous avons :

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{1}{60},$$

soit :

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{1}{60},$$

d'où :

$$z_1 z_3 = 60 z_2 z_4.$$

En supposant que les deux pignons ont chacun 10 dents, l'égalité précédente devient :

$$z_1 z_3 = 60 \cdot 10 \cdot 10 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^3.$$

Il est facile de vérifier que cette équation est satisfaite pour  $z_1 = 80$  et  $z_3 = 75$ .

Le rouage se compose donc d'une roue des minutes de 80 dents, d'un pignon de moyenne de 10 dents, d'une roue moyenne de 75 dents et d'un pignon des secondes de 10 dents.

**Le nombre d'alternances du balancier.** — L'arbre du pignon des secondes porte la roue des secondes qui engrène dans le pignon d'échappement dont l'arbre porte la roue du même nom.

Dans les échappements habituels, à chaque tour de la roue, une dent donne deux impulsions ; pour un tour de la roue, il y a donc deux fois plus d'impulsions qu'il n'y a de dents. Comme il y a autant d'alternances du balancier que d'impulsions, le nombre  $A$  d'alternances du balancier pendant que la roue d'échappement de  $z$  dents fait un tour sera  $A = 2z$ .

Dans l'échappement à détente ou dans les échappements « à coup perdu », à chaque tour de la roue une dent ne donne qu'une impulsion, mais cette impulsion n'a lieu qu'une fois par oscillation du balancier, c'est-à-dire qu'une fois pour deux alternances. On a donc aussi  $A = 2z$ .

Pour avoir le nombre d'alternances du balancier (ou du pendule) pendant un temps donné, il suffit de calculer le nombre de tours exécutés par la roue d'échappement pendant le même temps et de multiplier ce nombre de tours par le double du nombre de dents de la roue.

Soient (fig. 96)  $z_5$  et  $z_7$  les nombres de dents des roues des secondes et d'échappement,  $z_6$  le nombre de dents du pignon d'échappement. Pour un tour de la roue d'échappement, nous avons :

$$A = 2z_7.$$

Comme précédemment :

$$\frac{n_3}{n_4} = \frac{z_6}{z_5}$$

ou

$$n_4 = n_3 \frac{z_5}{z_6}.$$

Nous avons trouvé ci-dessus :

$$n_3 = n_1 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4},$$

donc :

$$n_4 = n_1 \frac{z_1 z_3 z_5}{z_2 z_4 z_6}.$$

Soit  $A_h$  le nombre d'alternances de l'organe réglant en une heure, c'est-à-dire pour  $n_1 = 1$ . Nous aurons :

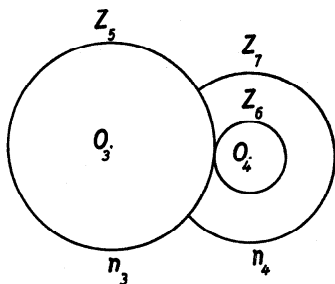


Fig. 96

$$n_4 = \frac{z_1 z_3 z_5}{z_2 z_4 z_6}$$

et

$$A_h = n_4 \cdot 2z_7,$$

donc :

$$A_h = \frac{z_1 z_3 z_5 \cdot 2z_7}{z_2 z_4 z_6}. \quad (25)$$

**Calcul du rouage compteur d'une montre ordinaire.** — Avant de passer à la construction d'un calibre, le technicien choisit la période du balancier qui est très souvent égale à  $\frac{2}{5}$  s, de sorte qu'un calcul simple permet de dire que le balancier doit faire 18 000 alternances à l'heure.

Ce nombre d'alternances n'est pas le seul qu'il soit possible de choisir. Nous trouvons :

$A_h = 14\,400$  dans les chronomètres de marine,

$A_h = 16\,200$  dans les montres anglaises,

$A_h = 17\,280$  dans les montres Roskopf,

$A_h = 20\,000$  à  $22\,000$  dans les petites montres,

$A_h = 36\,000$  dans les chronographes au 1/10 seconde.

Pour  $A_h = 18\,000$ , la formule (25) devient :

$$18\,000 = \frac{z_1 z_3 z_5 \cdot 2z_7}{z_2 z_4 z_6}.$$

Nous avons à déterminer les différentes valeurs de  $z$  de façon que cette équation à 7 inconnues soit satisfaite par des nombres utilisables dans la pratique.

Si la montre doit avoir une aiguille des secondes, il faut que :

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{1}{60}$$

ou

$$\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{1}{60}.$$

La roue d'échappement des montres a généralement 15 dents. Introduisons ces valeurs dans l'équation première :

$$18\,000 = \frac{60 \cdot z_5 \cdot 30}{z_6},$$

d'où :

$$z_5 = 10z_6.$$

En choisissant un pignon d'échappement de 7 dents, nous avons du même coup déterminé le nombre  $z_5$  des dents de la roue des secondes :

$$z_5 = 70.$$

Dans l'équation :

$$\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = \frac{1}{60},$$

faisons  $z_2 = 10$  et  $z_4 = 10$ . Comme nous l'avons expliqué précédemment, nous trouverons que les nombres  $z_1 = 80$  et  $z_3 = 75$  représentent des solutions acceptables. Le rouage compteur est ainsi constitué par :

une roue des minutes de 80 dents,  
une roue moyenne de 75 dents,  
une roue des secondes de 70 dents,  
une roue d'échappement de 15 dents,  
un pignon de moyenne de 10 dents,  
un pignon des secondes de 10 dents,  
un pignon d'échappement de 7 dents.

Il est prudent après un tel calcul de s'assurer que l'égalité :

$$18\,000 = \frac{80 \cdot 75 \cdot 70 \cdot 2 \cdot 15}{10 \cdot 10 \cdot 7}$$

subsiste.

Si la montre n'a pas d'aiguille des secondes, il n'est pas nécessaire que  $n_1 : n_3 = 1 : 60$ . Cependant rien n'empêche de choisir le même rapport des vitesses de sorte que le troisième arbre fasse aussi un tour par minute, mais sans porter d'aiguille.

Lorsque l'aiguille des secondes est au centre du mouvement, l'arbre qui la porte fait parfois partie du rouage ; dans ce cas, le calcul du rouage se fait comme pour une montre avec une aiguille des secondes décentrée.

Dans d'autres systèmes, l'aiguille des secondes au centre est actionnée par renvoi ; son arbre ne fait pas partie du rouage compteur. Si, dans un tel système, le pignon portant l'aiguille des secondes est actionné par la roue moyenne, le calcul du rouage est identique à celui d'un rouage ordinaire puisque nous avons le même rapport des vitesses et le même nombre de mobiles. Si le pignon des secondes au centre est actionné à partir du 3<sup>e</sup> arbre (celui qui devrait porter l'aiguille des secondes), il n'y a qu'à intercaler un renvoi entre le pignon du 3<sup>e</sup> arbre et le pignon des secondes ; le nombre de dents de ce renvoi est indifférent, seuls les nombres de dents des deux pignons déterminent le rapport des vitesses.

**Formule générale pour  $A_h$ .** — En développant la formule (25), nous avons supposé que le premier arbre fait un tour par heure. Il en est



ainsi lorsque cet arbre porte l'aiguille des minutes. Mais il peut arriver que le premier arbre fasse  $n_1$  tours par heure ou un tour en  $\frac{1}{n_1}$  heure. Pendant que l'arbre fait un tour, le nombre  $A$  d'alternances est  $A = \frac{A_h}{n_1}$ .

Dans ce cas, nous avons :

$$\frac{A_h}{n_1} = \frac{z_1 z_3 z_5 \cdot 2z_7}{z_2 z_4 z_6},$$

de sorte que la formule générale pour  $A_h$  est :

$$A_h = n_1 \frac{z_1 z_3 z_5 \cdot 2z_7}{z_2 z_4 z_6}, \quad (26)$$

dans laquelle  $n_1$  indique le nombre de tours par heure du premier arbre du rouage compteur. La formule (25) est un cas particulier de la formule (26).

**La montre Roskopf.** — La montre Roskopf est une montre simplifiée dont les caractéristiques sont les suivantes :

- 1° la roue et le pignon des minutes sont supprimés ;
- 2° le barillet dépasse le centre de la platine ;
- 3° une roue dite de minuterie et son pignon sont fixés à frottement gras au centre du couvercle de barillet ;
- 4° la chaussée qui porte l'aiguille des minutes est ajustée sur un tenon fixé au centre de la platine ;
- 5° le ressort de barillet porte à son extrémité extérieure une bride qui s'accroche dans une des 4 encoches pratiquées dans la paroi intérieure du tambour du barillet. Lorsque le ressort est complètement tendu et que l'on remonte davantage, la bride glisse hors d'une des encoches jusqu'à ce qu'elle ait rencontré l'encoche suivante où elle est arrêtée. Le bruit provoqué par ce déplacement brusque avertit le propriétaire de la montre que le ressort est complètement armé ;
- 6° l'échappement est à ancre à chevilles (ou à ancre habituel dans les petites pièces).

La montre Roskopf, inventée en 1867, est encore fabriquée aujourd'hui dans sa forme originale ou dans une forme légèrement modifiée. Les organisations horlogères suisses ont donné une définition de la montre Roskopf simple et de la montre Roskopf spéciale.

**Calcul du rouage d'une montre Roskopf simple.** — Puisque dans cette montre l'arbre des minutes est supprimé, si nous commençons le rouage compteur à partir du barillet, nous aurons le même nombre d'arbres et

de mobiles que dans un rouage compteur ordinaire à partir de la roue des minutes. Nous pourrions utiliser la formule générale (26), sans nous soucier du rapport des vitesses entre le barillet et le mobile suivant qui, ici, ne porte pas l'aiguille des minutes.

Le nombre d'alternances  $A_h$  est souvent égal à 17 280 ; le balancier fait alors 4,8 alternances par seconde. Si le barillet fait un tour en 4 heures, nous avons  $n_1 = \frac{1}{4}$  et la formule (26) devient :

$$17\,280 = \frac{1}{4} \frac{z_1 z_3 z_5 \cdot 2 z_7}{z_2 z_4 z_6}.$$

En choisissant les nombres de dents  $z_2, z_4, z_6$  des pignons et le nombre de dents  $z_7$  de la roue d'échappement qui est généralement égal à 18, nous constaterons facilement qu'un rouage dont les nombres de dents sont :

$$\begin{aligned} z_1 &= 128, & z_2 &= 8, \\ z_3 &= 84, & z_4 &= 7, \\ z_5 &= 60, & z_6 &= 6, \\ z_7 &= 18 \end{aligned}$$

donne le nombre d'alternances désiré.

La vitesse du second arbre peut être calculée d'après :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1},$$

d'où :

$$n_2 = \frac{n_1 z_1}{z_2}.$$

Comme  $n_1 = \frac{1}{4}$ , nous aurons  $n_2 = \frac{128}{4 \cdot 8} = 4$ . Le second arbre fait 4 tours à l'heure.

**La minuterie.** — La minuterie est le mécanisme qui engendre le mouvement correct de l'aiguille des heures portée par la *roue des heures*.

Dans les montres ordinaires, où la roue des minutes est la première roue du rouage compteur, on fixe sur l'arbre de cette roue un deuxième pignon, la *chaussée*. Celle-ci est parfois fixée sur un arbre, le *chevillot*, solidaire de la roue et du pignon des minutes (fig. 97) et qui traverse l'arbre percé de part en part. Le chevillot est ajusté de façon qu'il participe au mouvement général du rouage, mais qu'il soit cependant possible de le faire tourner indépendamment du rouage compteur lorsqu'on remet les aiguilles à l'heure.

Cette construction est aujourd'hui remplacée par celle dite de la *chaussée lanternée* (fig. 98), c'est-à-dire d'une chaussée dans laquelle on a pratiqué, au moyen d'une pince, deux hernies diamétralement opposées

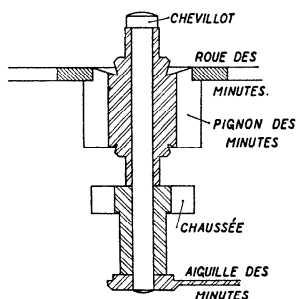


Fig. 97

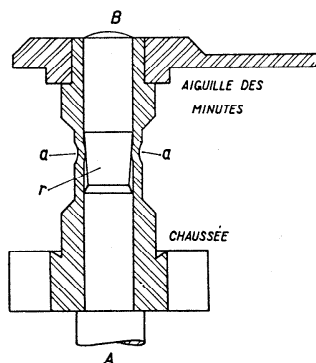


Fig. 98

*aa* qui trouvent place dans une rainure *r* de l'arbre *AB* du pignon des minutes qui, dans ce cas, n'est pas percé.

La pression élastique de ces hernies crée une solidarité suffisante entre l'arbre des minutes et la chaussée, de sorte que celle-ci entraîne le mécanisme de la minuterie pendant que la montre marche normalement. Les hernies assurent aussi la position longitudinale de la chaussée et l'empêchent de glisser le long de l'arbre.

D'autre part, la pression des hernies ne doit pas empêcher la rotation de la chaussée sur l'arbre des minutes, lors de la remise à l'heure des aiguilles.

La chaussée porte l'aiguille des minutes, qu'on peut ainsi déplacer dans un sens et dans l'autre, sans que le pignon et la roue des minutes participent à ce mouvement.

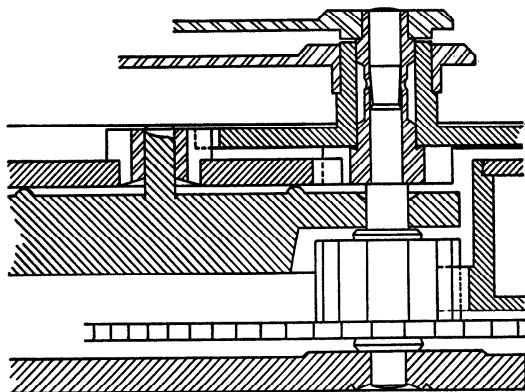


Fig. 99

La chaussée engrène dans la *roue de minuterie* qui tourne librement sur un tenon fixé à la platine de la montre; la roue de minuterie est solidaire du *pignon de minuterie*, qui engrène dans la *roue des heures*

(fig. 99) coaxiale avec la roue des minutes et tournant librement sur la chaussée. La roue des heures porte l'aiguille des heures.

On a affaire à un train d'engrenages à 3 arbres avec cette particularité que les axes du premier et du troisième arbre coïncident.

Pour calculer ce train d'engrenages, on peut utiliser la formule (24) mise sous la forme suivante :

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Dans cette formule,  $n_1$  désigne le nombre de tours de la chaussée en une heure,  $n_1 = 1$ ,  $n_3$  est le nombre de tours par heure de la roue des heures,  $n_3 = \frac{1}{12}$ ,  $z_1$  désigne le nombre de dents de la chaussée,  $z_2$  celui de la roue de minuterie,  $z_3$  celui du pignon de minuterie et  $z_4$  celui de la roue des heures.

Ici les indices pairs se rapportent aux roues ; c'est qu'il s'agit d'un rouage dans lequel, en temps normal, les pignons conduisent les roues.

On a l'équation :

$$\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = 12.$$

On pourrait résoudre cette équation en choisissant arbitrairement  $z_1$  et  $z_3$ . L'équation admet plusieurs solutions pour  $z_2$  et  $z_4$ , mais des considérations qui interviendront plus tard, à propos du module, excluent certaines solutions. Ces considérations qui n'ont joué aucun rôle dans les calculs précédents prennent ici une grande importance à cause de la coïncidence des axes du premier et du troisième arbre.

La Commission de normalisation de la Chambre suisse de l'horlogerie a publié en 1927 une feuille de normes NHS, 56 610 qui recommande de choisir parmi les groupes suivants :

| Groupe | $z_1$ | $z_2$ | $z_3$ | $z_4$ |
|--------|-------|-------|-------|-------|
| 1      | 10    | 30    | 8     | 32    |
| 2      | 12    | 32    | 8     | 36    |
| 3      | 15    | 40    | 10    | 45    |
| 4      | 15    | 45    | 12    | 48    |
| 5      | 8     | 24    | 8     | 32    |
| 6      | 10    | 30    | 10    | 40    |
| 7      | 12    | 36    | 10    | 40    |

Pour une montre ayant un cadran divisé en 24 heures, il faudra choisir des nombres de dents satisfaisant à l'équation :

$$\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} = 24.$$

Les nombres suivants satisfont cette équation :

$$z_1 = 14, \quad z_2 = 56, \quad z_3 = 10, \quad z_4 = 60.$$

**Minuterie de la montre Roskopf.** — Dans cette montre, le pignon portant l'aiguille des minutes ne fait pas partie du rouage de temps ; il fait partie de la minuterie composée comme suit : une roue  $H$  (fig. 100) concentrique au barillet engrène dans la chaussée  $I$  placée au centre du mouvement et portant l'aiguille des minutes. La roue  $H$  est solidaire du pignon  $K$  qui engrène dans la roue des heures  $L$ , libre sur la chaussée  $I$ . Nous avons ici deux engrenages distincts : l'engrenage  $H-I$  et l'engrenage  $K-L$ , caractérisés par le fait que les mobiles  $H$  et  $K$  ont la même vitesse puisqu'ils sont solidaires et que le rapport des vitesses des mobiles  $I$  et  $L$  doit être égal à 12, puisque ces mobiles portent l'un l'aiguille des minutes, l'autre l'aiguille des heures.

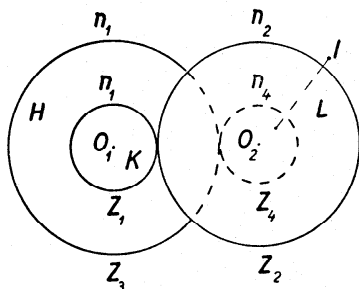


Fig. 100

Il s'agit de résoudre les équations :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad \frac{n_1}{n_4} = \frac{z_4}{z_3}, \quad \frac{n_2}{n_4} = \frac{1}{12}$$

qui se ramènent à :

$$z_2 = 3z_1, \quad z_3 = 4z_4,$$

si l'on admet les nombres de tours par heure :

$$n_1 = \frac{1}{4}, \quad n_2 = \frac{1}{12}, \quad n_4 = 1.$$

**Le train de renvois.** — Dans certains cas, les roues dentées n'ont d'autre but que de transmettre l'énergie. A cet effet, on utilise un *train de renvois*, c'est-à-dire un rouage dans lequel chaque arbre ne porte qu'une roue.

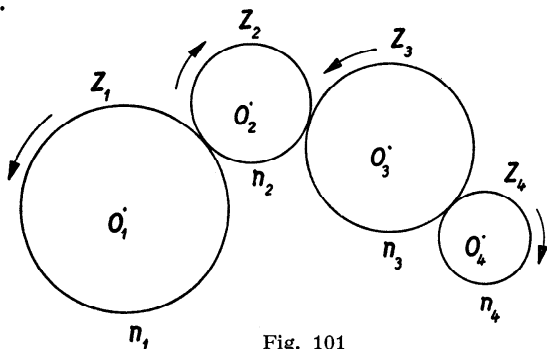


Fig. 101

Soient (fig. 101)  $O_1, O_2, O_3, O_4$ , quatre roues dont le nombre de dents est  $z_1, z_2, z_3, z_4$  et le nombre de tours par heure  $n_1, n_2, n_3, n_4$ , par exemple. On a :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad \frac{n_2}{n_3} = \frac{z_3}{z_2}, \quad \frac{n_3}{n_4} = \frac{z_4}{z_3}.$$

En multipliant ces équations membre à membre, il viendra :

$$\frac{n_1}{n_4} = \frac{z_4}{z_1}. \quad (27)$$

Le résultat est le même que si la première roue engrenait directement dans la dernière : *les roues intermédiaires ne modifient pas le rapport des vitesses.*

Si le nombre des roues est pair, la première et la dernière roue n'auront pas le même sens de rotation, mais elles tourneront dans le même sens dans un train de renvois composé d'un nombre impair de roues.

**Rouage de mise à l'heure des montres.** — Dans les montres, la mise à l'heure se fait généralement par la tige de remontoir qui porte, ajusté sur un carré, le *pignon coulant* (*pignon baladeur*), lequel engrène dans une roue faisant partie d'un train de renvois dont le dernier mobile est la chaussée (fig. 102).

On a :

$$\frac{n_1}{n_5} = \frac{z_5}{z_1}.$$

Etant donnés les nombres de dents du pignon coulant et de la

chaussée, cette formule permet de résoudre facilement les problèmes suivants :

1° combien faut-il de tours de la tige de remontoir pour que l'aiguille des minutes fasse un tour ?

2° quel est l'angle décrit par l'aiguille des minutes lorsque la tige de remontoir fait un tour ?

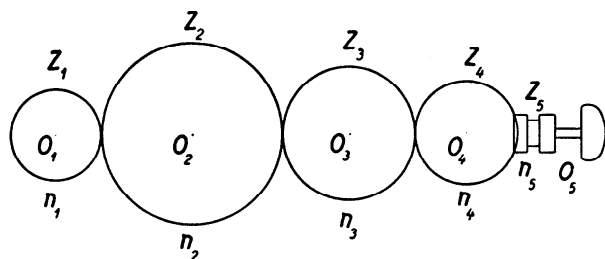


Fig. 102

La détermination des nombres de dents des renvois et du pignon coulant se fait d'après des considérations d'encombrement et de solidité. Pour que le train de renvois fonctionne normalement, il faut que toutes les roues qui le composent aient le même pas.

**Rouage du remontoir.** — Ce rouage se compose du pignon de remontoir solidaire de la tige de remontoir pendant le remontage. Ce pignon engrène avec la *roue en couronne* ou *couronne* qui porte une seconde denture engrenant dans le *rochet* fixé sur l'arbre du barillet (fig. 103). Dans les montres de hauteur réduite, les deux dentures de la couronne sont souvent réunies en une seule, biseautée du côté du pignon de remontoir.

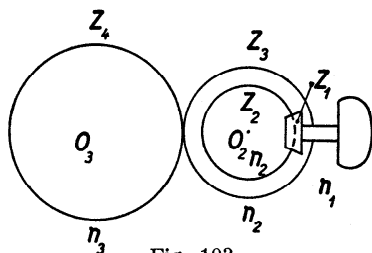


Fig. 103

Le pignon de remontoir a  $z_1$  dents ; la couronne en a  $z_2$  (denture de champ) et  $z_3$  ; le rochet en a  $z_4$ . On a :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad \frac{n_2}{n_3} = \frac{z_4}{z_3},$$

d'où :

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Cette dernière formule permet de calculer le nombre de tours que doit exécuter la tige de remontoir pour que le rochet fasse un tour complet, c'est-à-dire pour armer le ressort d'un angle de  $2\pi$  radians.

**Indicateur du développement du ressort dans les montres à fusée.** — Les chronomètres de marine sont généralement munis d'une aiguille supplémentaire indiquant sur un cadran spécial le degré de tension du ressort moteur.

Le mécanisme actionnant cette aiguille est facile à réaliser dans les montres à fusée car l'arbre de celle-ci tourne aussi bien pendant le remontage que pendant la marche normale de la montre. Il suffit de placer un pignon sur l'arbre de la fusée et de le faire engrener avec une roue portant l'aiguille indicatrice du développement. Cette aiguille se meut sur un cadran incomplet (fig. 104).

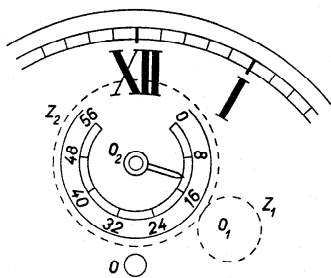


Fig. 104

Supposons que le chronomètre marche  $h$  heures pour  $n$  tours de la fusée. Cependant, l'aiguille doit parcourir un angle  $\alpha = \frac{a}{b}$  exprimé en tours. Choisissons pour  $\frac{a}{b}$  une valeur à peu près égale à  $\frac{7}{8}$  (cette valeur est variable et peut descendre jusqu'à  $\frac{2}{3}$ ). Le chiffre 12 du cadran des heures se trouve entre les extrémités de l'arc parcouru par l'aiguille de l'indicateur.

Si  $z_1$  et  $z_2$  désignent les nombres de dents du pignon de fusée et de la roue, nous avons :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\frac{a}{b}}{n} = \frac{a}{bn}.$$

Admettons  $n = 8$  et  $\frac{a}{b} = \frac{7}{8}$ . Nous aurons :

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{7}{64},$$

d'où :

$$z_1 = 7, \quad z_2 = 64$$

ou

$$z_1 = 14, \quad z_2 = 128.$$

Si ces nombres nous paraissent peu pratiques, nous pouvons les modifier en changeant légèrement la valeur de la fraction  $\frac{a}{b}$ . Si nous posons  $\frac{a}{b} = \frac{5}{6}$ , nous avons :



$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5}{48},$$

d'où :

$$z_1 = 10, \quad z_2 = 96.$$

Le mécanisme en question ne peut pas être appliqué aux montres sans fusée, puisque l'arbre de barillet est mû pendant le remontage, mais reste fixe quand la montre marche en dehors de la période de remontage.

**Le rouage de sonnerie des horloges.** — Les horloges à poids ou à ressort ont parfois un rouage spécial qui actionne le mécanisme de la sonnerie. Ce rouage marche par intermittences (1, 2 ou 4 fois par heure suivant que l'horloge sonne les heures, les heures et les demies, ou les heures et les quarts). Le calcul d'un tel rouage se fait comme celui d'un rouage ordinaire qui, lui aussi, marche par intermittences, à chaque alternance du régulateur.

Soit une horloge marchant 8 jours et qui doit indiquer les heures et les quarts. Son rouage spécial se compose d'un barillet *A* contenant le ressort de sonnerie (fig. 105), d'un pignon *a* et d'une roue intermédiaire *B* (appelée aussi roue de huitaine), d'un pignon *b* et d'une roue des chevilles *C*, d'un pignon *c* et d'une roue

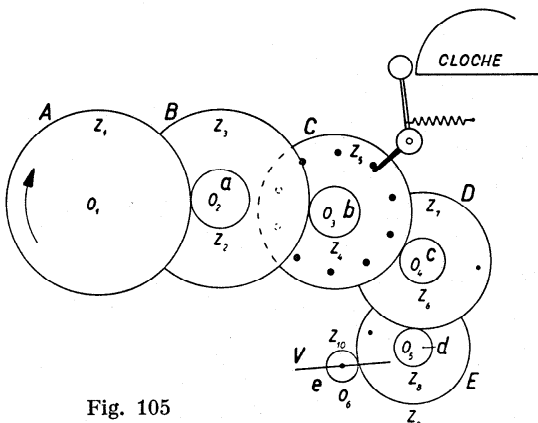


Fig. 105

d'arrêt *D*, d'un pignon *d* et d'une roue de délai (roue de volant) *E* et d'un pignon de volant *e*. Le dernier pignon porte le volant *V* offrant à l'air une grande résistance ; c'est un régulateur qui empêche le mouvement de s'accélérer au-delà d'une certaine limite.

La roue des chevilles porte un certain nombre de chevilles qui actionnent les marteaux frappant les heures et les quarts.

La roue d'arrêt *D* porte une goupille qui arrête le rouage quand elle est appuyée sur un levier mobile. Ce levier est écarté tous les quarts d'heure et alors le rouage est libéré. Mais ce n'est pas pour longtemps parce que, dès que la roue de délai *E* a parcouru à peu près un demi-tour, une goupille plantée sur la serge de la roue *E* vient buter contre un autre levier mobile, qui sera bientôt écarté au moment où la sonnerie doit se produire.

En 12 heures, l'horloge doit sonner 150 coups dont 78 pour les heures et 72 pour les quarts. Si la roue des chevilles porte 10 chevilles, il faut qu'en 12 heures la roue  $C$  fasse 15 tours. Nous choisirons la vitesse du volant  $V$  et lui imposerons de faire un nombre  $n$  de tours à chaque coup de la sonnerie. Ce nombre  $n$  devra être suffisamment grand afin que les coups soient assez espacés et puissent être distinctement perçus et comptés. Posons  $n = 72$ . Le volant  $V$  et son pignon  $e$  font 720 tours pendant que la roue des chevilles en fait 1.

Pour que la goupille de la roue de délai garde toujours la même position par rapport au levier d'arrêt, il faut que la roue de délai fasse un nombre entier de tours à chaque coup.

Calculons le rouage situé entre le volant  $V$  et la roue des chevilles  $C$ ; le rapport des vitesses angulaires de  $e$  et de  $C$  est égal à 720. Nous aurons :

$$720 = \frac{z_5 z_7 z_9}{z_6 z_8 z_{10}}.$$

Choisissons les nombres de dents des pignons :

$$z_6 = z_8 = z_{10} = 7.$$

Nous obtenons :

$$z_5 z_7 z_9 = 720 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7^3.$$

Les nombres de dents des roues peuvent être :

$$z_5 = 70, \quad z_7 = 63, \quad z_9 = 56.$$

A chaque coup, le volant fait 72 tours et la roue de délai :

$$72 \cdot \frac{7}{56} = 9 \text{ tours.}$$

Pour calculer le rouage entre  $A$  et  $C$ , admettons que le barillet fasse 5 tours en 8 jours. Pendant le même temps, le pignon et la roue des chevilles en font  $240 = 8 \cdot 15 \cdot 2$ . D'où :

$$\frac{240}{5} = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} = 48.$$

Admettons :

$$z_2 = 12 \quad \text{et} \quad z_4 = 10,$$

alors :

$$z_1 z_3 = 48 \cdot 12 \cdot 10;$$

$z_1 = 80$  et  $z_3 = 72$  sont deux nombres de dents acceptables.

D'autres systèmes de sonnerie ont un *chaperon* ou *roue de compte* qui est parfois sur l'arbre de la roue que nous avons appelée intermédiaire. C'est une roue qui a une forme analogue à celle qui est représentée par la figure 106. Un bec terminant un levier mobile est appuyé par un ressort contre le bord de la jante du chaperon dont les cames règlent la sonnerie. Les coups de la sonnerie se répètent après une période de 12 heures ; le chaperon doit faire un tour en 12 heures.

Si la roue de compte est solidaire de l'arbre de la roue intermédiaire et si le barillet fait 5 tours en 8 jours ou  $\frac{5}{16}$  de tour en 12 heures, le rapport

des vitesses du barillet et du chaperon est  $\frac{5}{16}$ . Ce rapport pourrait être

réalisé par un barillet de 64 dents engrenant dans un pignon de 20 dents.

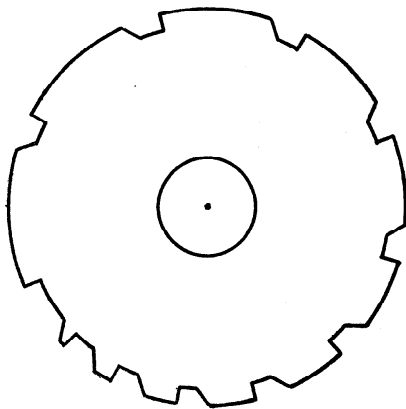


Fig. 106

**Rouage dont le rapport des vitesses est une fraction irréductible formée de grands nombres.** — Dans les exemples traités, nous avons eu affaire à des rapports de vitesse exprimés par de petits nombres.

Si, dans une horloge ou une montre, nous voulions représenter les mouvements du Soleil et de la Lune, nous devrions considérer les vitesses des deux astres, c'est-à-dire leur durée de révolution. Or, ces durées sont exprimées par des nombres compliqués.

Simplifions ces nombres et admettons que les durées de révolution du Soleil et de la Lune soient respectivement 365 et 29 jours. Le rapport des vitesses angulaires est :

$$\frac{365}{29}.$$

Pour réaliser ce rapport par un seul engrenage, nous devrions utiliser une roue de 365 et une roue de 29 dents. Le premier nombre est mal commode parce que trop grand.

Comme les appareils dans lesquels on enregistre les mouvements des astres ne sont pas des appareils de haute précision, on peut se contenter de nombres de dents plus petits et plus pratiques, mais ne donnant qu'approximativement le rapport de vitesses demandé. Mais comment choisir

à bon escient ces nombres plus petits? Il existe pour cela une méthode, celle des fractions continues.

Pour transformer  $\frac{365}{29}$  en fraction continue, on extrait d'abord les entiers et l'on a :

$$\frac{365}{29} = 12 + \frac{17}{29}.$$

On divise les deux termes de la fraction  $\frac{17}{29}$  par 17 de façon à avoir 1 comme numérateur :

$$\frac{365}{29} = 12 + \frac{1}{\frac{29}{17}} = 12 + \frac{1}{1 + \frac{12}{17}}.$$

On traite de même la fraction  $\frac{12}{17}$ , et ainsi de suite... On obtient en définitive, une fraction composée d'une suite de fractions qui ont toutes 1 pour numérateur :

$$\frac{365}{29} = 12 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}}.$$

Les *réduites* sont les valeurs que l'on obtient en calculant la valeur d'une fraction continue dont on a négligé une ou plusieurs fractions partielles. Ce sont des valeurs d'autant plus approchées qu'on néglige moins de termes.

On appelle :

1<sup>re</sup> réduite : 12 (toutes les fractions sont négligées),

$$2^{\text{e}} \text{ réduite : } 12 + \frac{1}{1} = 13,$$

$$3^{\text{e}} \text{ réduite : } 12 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = 12 \frac{1}{2} = \frac{25}{2},$$

$$4^{\text{e}} \text{ réduite : } 12 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = 12 \frac{3}{5} = \frac{63}{5},$$

$$5^{\text{e}} \text{ réduite : } 12 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}} = 12 \frac{7}{12} = \frac{151}{12}.$$

La 6<sup>e</sup> réduite serait égale à la fraction continue, c'est-à-dire à  $\frac{365}{29}$ .

Pour se rendre compte de l'erreur commise en remplaçant une fraction continue par une de ses réduites, il est pratique de transformer ces valeurs en fractions décimales :

$$\frac{365}{29} = 12,586 \text{ 21}$$

|                                    |                         |
|------------------------------------|-------------------------|
| 1 <sup>re</sup> réduite = 12       | Différence = - 0,586 21 |
| 2 <sup>e</sup> réduite = 13        | + 0,413 79              |
| 3 <sup>e</sup> réduite = 12,5      | - 0,086 21              |
| 4 <sup>e</sup> réduite = 12,6      | + 0,013 79              |
| 5 <sup>e</sup> réduite = 12,583 33 | - 0,002 88              |

On voit qu'en choisissant deux roues de 151 et 12 dents, le rapport des vitesses est réalisé avec une grande approximation.

Proposons-nous de déterminer le nombre d'années nécessaires pour que la roue des lunaisons, qui va trop lentement, soit en retard d'un tour.

Soient  $n_1$  et  $n_2$  les nombres de tours exécutés par la Lune et le Soleil :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{365}{29} = 12,586 \text{ 21}.$$

Mais nous avons un rouage tel que :

$$\frac{n'_1}{n_2} = \frac{151}{12} = 12,583 \text{ 33}.$$

Or, il faut que :

$$n'_1 = n_1 - 1.$$

Les équations :

$$\frac{n_1}{n_2} = 12,586 \text{ 21}, \quad \frac{n_1 - 1}{n_2} = 12,583 \text{ 33}$$

permettent de calculer  $n_1$  et  $n_2$ . Nous trouvons :

$$n_1 = 4370,211, \quad n_2 = 347,222.$$

Il serait facile de calculer après combien d'années ou de lunaisons il faudrait faire avancer la roue des lunaisons d'une dent afin de rétablir la position exacte de l'aiguille.

L'exemple que nous venons d'exposer est notablement simplifié ; en réalité le mois lunaire vaut :

$$29 \text{ j } 12 \text{ h } 44 \text{ m } 3 \text{ s} = 2\,551\,443 \text{ s},$$

l'année tropique :

$$365 \text{ j } 5 \text{ h } 48 \text{ m } 46 \text{ s} = 31\,556\,926 \text{ s},$$

et le rapport des vitesses angulaires est donné par la fraction irréductible :

$$\frac{31\,556\,926}{2\,551\,443}$$

qui peut être réduite en fraction continue comme nous l'avons indiqué.

**Rappel des propriétés des fractions continues.** — Soit une fraction continue de la forme :

$$a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Les réduites successives sont :

$$1^{\text{re}} \text{ réduite : } a_1,$$

$$2^{\text{e}} \text{ réduite : } a_1 + \frac{1}{a_2},$$

$$3^{\text{e}} \text{ réduite : } a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}},$$

et ainsi de suite.

On a les relations suivantes :

1° une réduite est toujours une fraction irréductible ;

2° une réduite est exprimée par des nombres plus petits que ceux d'une des réduites suivantes ;

3° toute réduite de rang impair est plus petite que la fraction ; toute réduite de rang pair est plus grande ;

4° toute réduite de rang pair est plus grande que la réduite précédente et que la réduite suivante ; toute réduite de rang impair est plus petite que la réduite précédente et que la réduite suivante ;

5° les réduites de rang pair vont en diminuant ; les réduites de rang impair, en augmentant ;

6° la valeur d'une fraction continue est comprise entre deux réduites consécutives et se trouve plus près de celle qui a le rang le plus élevé ;

7° chaque réduite approche plus de la valeur de la fraction continue que toute fraction ordinaire dont les termes sont plus petits que ceux de la réduite.

**Application au filetage.** — On est parfois appelé à fileter une vis dont le pas est exprimé en pouces sur un tour ayant une vis-mère métrique. Le rapport entre le pas du tour et celui que doit avoir le filet est exprimé par des nombres compliqués. En réduisant ce rapport en fraction continue, on trouve, au moyen des réduites, un rapport plus simple et suffisamment exact pour permettre de combiner un rouage utilisable.

Proposons-nous, par exemple, de fileter une vis au pas  $\frac{1}{20}$  de pouce sur un tour dont la vis-mère a un pas de 5 mm. Puisque  $\frac{1}{20}$  de pouce vaut 1,27 mm, le rapport des pas est :

$$\frac{1,27}{5} = \frac{127}{500} = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{14 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7}}}}}$$

Les réduites successives sont :

$$0, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{15}{59}, \quad \frac{16}{63}.$$

La cinquième réduite peut s'écrire :

$$\frac{16}{63} = \frac{4 \cdot 4}{7 \cdot 9} = \frac{20 \cdot 20}{35 \cdot 45}.$$

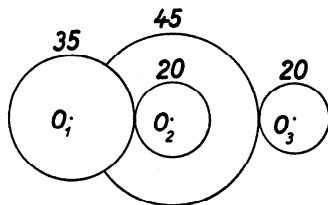


Fig. 107

En utilisant un rouage composé de deux roues de 35 et 45 dents engrenant dans deux roues de 20 dents chacune (fig. 107), nous réalisons un rapport  $\frac{16}{63}$  qui est bien près de  $\frac{1,27}{5}$ .

Pour que ce procédé soit applicable, il faut disposer d'un jeu de roues assez complet, permettant de réaliser beaucoup de combinaisons différentes.

En réalité, il y a souvent dans le jeu une roue de 127 dents qu'il s'agit de combiner avec d'autres. Le nombre 127 a été choisi parce qu'il est en rapport simple avec la dimension approximative du pouce en millimètres :

$$127 = \frac{25,4}{2} \cdot 10.$$

Dans le cas qui nous occupe, pour réaliser le rapport :

$$\frac{\frac{25,4}{20}}{5} = \frac{1,27}{5},$$

nous pourrions choisir les combinaisons :

$$16 - 80 \quad \text{et} \quad 127 - 100.$$

En effet, nous avons :

$$\frac{16}{80} \cdot \frac{127}{100} = \frac{1,27}{5}.$$

Nous n'avons pas fait appel ici aux fractions continues parce que nous avons d'emblée simplifié la valeur du pouce.

**Les engrenages différentiels.** — Pour réaliser des rapports de vitesses exprimés par de grands nombres, on peut, au lieu d'avoir recours à un engrenage ordinaire dont on a calculé les nombres de dents par la méthode des fractions continues, utiliser des *engrenages différentiels*. Dans ceux-ci au moins un des mobiles dentés a un mouvement de rotation autour de son axe, lequel exécute une « translation » autour de l'axe d'une autre roue.

Le calcul des vitesses angulaires ou des nombres de tours ne se fait pas comme dans les engrenages dans lesquels les roues tournent autour d'axes fixes.

**Les engrenages différentiels plans.** — Si les roues planes tournent dans des plans parallèles, nous avons un *engrenage différentiel plan*.

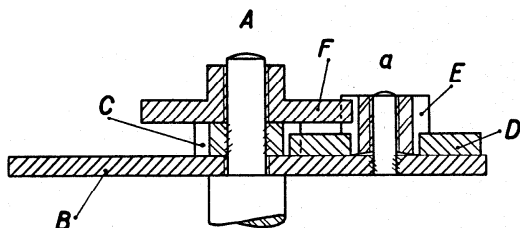


Fig. 108



La figure 108 représente un arbre  $A$  portant le bras  $B$  libre sur  $A$  ; la roue  $C$  est solidaire de l'arbre  $A$  ; le bras  $B$  porte un goujon  $a$  autour duquel tournent la roue  $D$  et le pignon  $E$  solidaires l'un de l'autre ; ce dernier pignon  $E$  entraîne la roue  $F$  libre sur  $A$ .

Si les axes étaient fixes, nous aurions, puisqu'il s'agirait d'engrenages ordinaires (fig. 109) :

$$n_3 = n_1 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}$$

Appelons raison  $r$  de l'engrenage, le rapport :

$$r = \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4},$$

d'où :

$$n_3 = n_1 r.$$

Au lieu des nombres de tours, nous pouvons aussi faire intervenir les vitesses angulaires  $\omega_1$  et  $\omega_3$  :

$$\omega_3 = \omega_1 r.$$

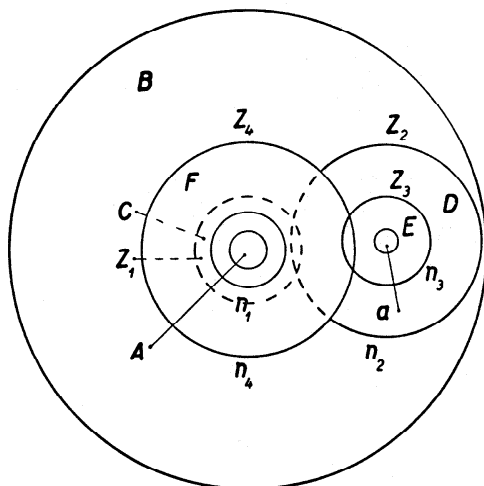


Fig. 109

Supposons l'axe  $A$  fixe ; la roue  $C$  l'est aussi puisqu'elle est solidaire de  $A$ . Faisons tourner le goujon  $a$  et le bras  $B$  autour de  $A$  avec la vitesse angulaire  $\omega_2$ . Pour un tour du bras  $B$ , la roue  $D$  fait autant de tours que  $z_2$  est compris de fois dans  $z_1$ . Soit  $n$  le nombre de tours exécutés par  $D$  pendant  $n_2$  tours du bras  $B$  :

$$n = n_2 \frac{z_1}{z_2}$$

ou

$$\omega = \omega_2 \frac{z_1}{z_2} ;$$

$n$  et  $\omega$  se rapportent aux roues  $D$  et  $E$  solidaires l'une de l'autre.

La roue  $E$  entraîne  $F$  et lui communique une vitesse angulaire  $\omega'_3$  :

$$\omega'_3 = \omega \frac{z_3}{z_4} = \omega_2 \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} = \omega_2 r.$$

Mais, pour un tour du bras  $B$  et du fait de la seule « translation »,  $F$  fait aussi un tour, mais en sens inverse de la rotation provoquée par le

pignon  $E$ ;  $F$  a donc une vitesse angulaire égale à la somme des vitesses angulaires provoquées par l'engrenage et par la « translation » :

$$\omega_3 = \omega_2 - \omega'_3 = \omega_2 - \omega_2 r = \omega_2 (1 - r).$$

Si nous faisons tourner la roue  $C$  avec la vitesse  $\omega_1$  et le bras  $B$  avec la vitesse  $\omega_3$ , la vitesse angulaire  $\omega_0$  de la roue  $F$  sera la somme de la vitesse angulaire engendrée comme précédemment (roue  $C$  fixe) et de la vitesse angulaire résultant de la rotation de la roue  $C$  avec la vitesse  $\omega_1$ .

La première vitesse est  $\omega_3 = \omega_2 (1 - r)$ , la seconde est  $\omega_1 r$ . Donc :

$$\omega_0 = \omega_1 r + \omega_2 (1 - r). \quad (28)$$

C'est la *formule de Willis* qu'il est possible de mettre sous l'une des formes suivantes :

$$r = \frac{\omega_0 - \omega_2}{\omega_1 - \omega_2}, \quad (28)$$

$$\omega_1 = \frac{1}{r} [\omega_0 - (1 - r) \omega_2], \quad (28)$$

$$\omega_2 = \frac{\omega_0 - r \omega_1}{1 - r}. \quad (28)$$

Dans la formule de Willis, nous pouvons remplacer la vitesse angulaire par le nombre de tours exécutés en un certain temps. Si ce temps est l'unité, la seconde par exemple, nous avons :

$$\omega = 2\pi n.$$

**Exemple numérique.** — Quand la première roue  $C$  est immobile, nous avons  $\omega_1 = 0$  et la formule de Willis permet de calculer :

$$\frac{\omega_0}{\omega_2} = 1 - r.$$

Le rapport entre les vitesses angulaires de la roue  $F$  et du bras  $B$  est d'autant plus près de l'unité que  $r$  est plus petit. Or  $r$  est petit quand le produit  $z_1 z_3$  diffère peu du produit  $z_2 z_4$ . Supposons :

$$\begin{aligned} z_1 &= 200, & z_2 &= 199, \\ z_3 &= 200, & z_4 &= 201. \end{aligned}$$

Alors :

$$r = \frac{200 \cdot 200}{199 \cdot 201} = \frac{40\,000}{39\,999},$$

d'où :

$$\frac{\omega_0}{\omega_2} = - \frac{1}{39\,999}.$$

Puisque le rapport entre les vitesses angulaires est négatif, la roue *F* tourne en sens inverse du bras. D'après la valeur de ce rapport, nous concluons que le bras doit faire 39 999 tours pour que la roue *F* exécute une rotation en sens inverse.

Nous pouvons donc, à l'aide d'un train différentiel, réduire considérablement les vitesses en utilisant des mobiles dont le nombre de dents soit normal.

### L'indicateur de développement du ressort dans les montres sans fusée. —

Depuis quelques années, on munit d'un indicateur de développement certaines montres sans fusée, telles que les montres 8 jours pour automobiles, certains chronomètres de bord et des montres à remontage automatique.

Le problème est complexe ; il faut commander l'aiguille de l'indicateur, d'une part, par l'arbre de barillet ou toute autre pièce participant à son mouvement et, d'autre part, par le barillet lui-même ou par un élément quelconque du rouage. Cette double commande n'est pas réalisable par un train d'engrenages ordinaire. On peut la réaliser par un train différentiel.

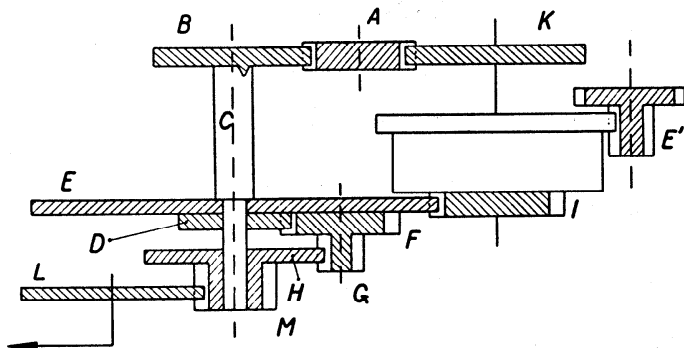


Fig. 110

Voici à titre d'exemple le dispositif adopté par la fabrique des montres Longines pour les montres 8 jours. La roue de couronne *A* (fig. 110) engrène avec un renvoi *B*, calé sur l'arbre *C* qui traverse le mouvement de part en part. Sur cet arbre, une roue *D* est fixée qui va jouer le rôle de premier mobile d'un train différentiel dont *E* est le bras mobile et *H* la dernière roue. *E* est en réalité une roue dentée qui engrène avec une autre roue *I* fixée sur le barillet lui-même ; *L* porte l'aiguille de l'indicateur. On voit que la position de l'aiguille dépend des mouvements de l'arbre de barillet d'une part et du barillet d'autre part.

Le problème à résoudre comporte les données suivantes :  
la durée de marche *n* en heures ;

le rapport d'engrenage  $r$  entre le barillet et le mobile portant l'aiguille des minutes ;

le nombre de dents  $K$  du rochet ;

les nombres de dents des autres roues, indiqués ici par la lettre majuscule qui désigne la roue dans la figure 110 :  $A, B, C, D$ , etc. ;

l'angle  $\alpha$  que doit parcourir l'aiguille de l'indicateur pour une durée de marche donnée.

Le nombre de tours du barillet en  $a$  heures sera :

$$n_b = \frac{a}{r}$$

et on aura :

$$\alpha = \frac{n_b \cdot K \cdot A \cdot D \cdot G \cdot M}{A \cdot B \cdot F \cdot H \cdot L}. \quad (29)$$

En partant du barillet lui-même et en appliquant la formule de Willis au train différentiel composé des mobiles  $D, F, G, H$ , on obtient :

$$\alpha = \frac{N \cdot I \cdot \left(1 - \frac{D \cdot G}{F \cdot H}\right) \cdot M}{E \cdot L}, \quad (30)$$

Les équations (29) et (30) permettent de calculer les nombres de dents à la condition de se donner un certain nombre de valeurs. Si, pour fixer les idées, on suppose que  $r = 40$ ,  $n = 10$  jours = 240 heures et que le nombre de dents du rochet = 60, on a :

$$n_b = \frac{240}{40} = 6.$$

Si, en 8 jours de marche, l'aiguille indicatrice doit parcourir  $\frac{4}{5}$  de tour, c'est-à-dire si l'aiguille fait 1 tour en 10 jours, et si  $D = F$ ,  $B = 20$ ,  $G = 10$ , l'équation (29) devient :

$$1 = \frac{6 \cdot 60 \cdot 10 \cdot M}{20 \cdot H \cdot L},$$

d'où :

$$\frac{M}{H \cdot L} = \frac{1}{180} = \frac{10}{1800} = \frac{10}{2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2}.$$

Cette équation sera satisfaite si :

$$M = 10, \quad H = 45, \quad L = 40.$$

En introduisant les quantités connues dans l'équation (30) et en admettant  $D = F = 20$ , il vient :

$$1 = \frac{6I}{E} \left( 1 - \frac{20 \cdot 10}{20 \cdot 45} \right) \cdot \frac{10}{40},$$

d'où :

$$\frac{I}{E} = \frac{1}{6 \cdot \left( 1 - \frac{2}{9} \right) \cdot \frac{1}{4}} = \frac{6}{7}.$$

En choisissant  $I = 24$  et  $E = 28$ , l'équation sera satisfaite et le rouage sera composé de mobiles ayant les nombres de dents suivants :

$$\begin{aligned} K &= 60, & D &= 20, & G &= 10, \\ M &= 10, & I &= 24, & B &= 20, \\ F &= 20, & H &= 45, & L &= 40, \\ E &= 28. \end{aligned}$$

On voit qu'un tel problème est susceptible de plusieurs solutions. L'aiguille indicatrice est commandée pendant le remontage de la montre par le rochet et par un train d'engrenages ordinaire composé des roues  $K, A, B, D, F, G, H, M$  et  $L$ . Pendant la marche de la montre, l'aiguille est commandée par le barillet à travers le train différentiel composé des roues  $D, F, G, H$  et des engrenages habituels  $I - E$  et  $M - L$ .

Le sens de rotation de l'aiguille indicatrice n'est pas le même pendant le remontage et pendant la marche normale de la montre.

**Engrenage différentiel sphérique.** — En utilisant deux roues d'angle  $A$  et  $B$  (fig. 111) montées folles sur un arbre  $OO$  et engrenant avec une roue d'angle  $C$  libre sur un goujon  $D$  planté dans l'arbre  $OO$ , nous obtenons un *engrenage différentiel sphérique*. Les roues  $A$  et  $B$  doivent avoir le même nombre de dents. Si  $A$  est la première roue et  $B$  la dernière, la raison de l'engrenage est :

$$r = -1,$$

les deux roues tournant avec la même vitesse, mais en sens contraires.

Si l'arbre  $OO$  tourne, il entraîne le bras  $D$  avec une vitesse angulaire que nous appellerons  $\omega_2$  comme dans le cas de l'engrenage

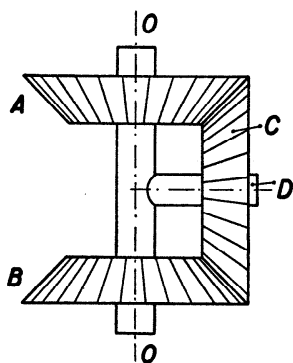


Fig. 111

différentiel plan. Appelons  $\omega_1$  la vitesse angulaire de  $A$  et  $\omega_0$  celle de  $B$ . Appliquons la formule de Willis :

$$\omega_2 = \frac{\omega_0 - r\omega_1}{1 - r};$$

nous trouvons :

$$\omega_2 = \frac{\omega_0 + \omega_1}{2}. \quad (31)$$

*La vitesse angulaire du bras est égale à la moyenne algébrique des vitesses angulaires des roues  $A$  et  $B$ .*

Ces vitesses peuvent être de même signe ou de signes contraires, de sorte que la moyenne algébrique signifie tantôt la demi-somme tantôt la demi-différence.

D'après (31) nous voyons que  $\omega_2 = 0$  pour  $\omega_0 = -\omega_1$ . L'arbre  $OO$  ne tourne pas si les vitesses angulaires de  $A$  et  $B$  sont égales et de signes contraires.

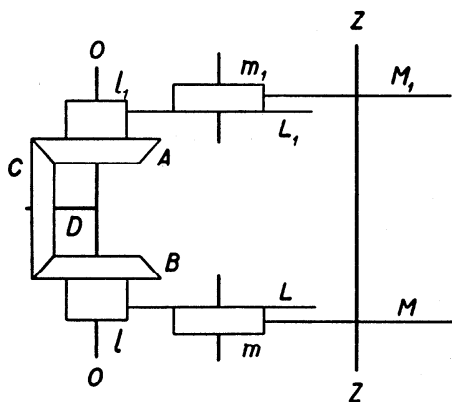


Fig. 112

**Réalisation de rapports complexes au moyen d'engrenages différentiels sphériques.** — Commandons les roues  $A$  et  $B$  à partir d'un arbre  $z$  (fig. 112). Appelons  $\omega$  la vitesse angulaire de  $z$ .

La vitesse angulaire de  $A$  est  $\omega_1$  :

$$\omega_1 = \omega \frac{M_1 L_1}{m_1 l_1}.$$

La vitesse angulaire de  $B$  est  $\omega_0$  :

$$\omega_0 = \omega \frac{ML}{ml}.$$

Dans ces formules  $M, M_1, L, L_1, m, m_1, l, l_1$  représentent les nombres de dents des roues désignées par les mêmes lettres.

Nous avons d'après (31) :

$$\omega_2 = \frac{\omega}{2} \left[ \frac{ML}{ml} + \frac{M_1 L_1}{m_1 l_1} \right],$$

$\omega_2$  étant la vitesse angulaire de l'arbre  $OO$ .

Le rapport des vitesses angulaires des arbres  $OO$  et  $zz$  est :

$$\frac{\omega_2}{\omega} = \frac{1}{2} \left[ \frac{ML}{ml} + \frac{M_1 L_1}{m_1 l_1} \right].$$

Si le rapport des vitesses est imposé, il s'agit de décomposer ce rapport en une somme de deux fractions dont les termes sont eux-mêmes décomposables. Les valeurs  $M, M_1, L, L_1, m, m_1, l, l_1$  sont en partie arbitraires ; nous pouvons poser :

$$m = m_1, \quad l = l_1.$$

Le rapport des vitesses devient :

$$\frac{\omega_2}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{ML + M_1 L_1}{ml}$$

ou

$$2\omega_2 = \frac{\omega}{ml} [ML + M_1 L_1].$$

En posant  $\frac{\omega}{ml} = K$ , il vient :

$$2\omega_2 = K [ML + M_1 L_1].$$

Nous pouvons choisir  $m$  et  $l$  de façon que  $K = 1$  :

$$ml = \omega,$$

nous aurons :

$$2\omega_2 = ML + M_1 L_1.$$

La vitesse angulaire  $\omega_2$  est donnée ; nous avons une équation à quatre inconnues. Nous pouvons imposer à deux de ces inconnues des valeurs acceptables et calculer les deux autres de façon qu'elles soient entières et positives. Il s'agit en fin de compte de résoudre une équation indéterminée du 1<sup>er</sup> degré à deux inconnues.

**Exemple numérique.** — Cherchons à réaliser, au moyen d'un différentiel sphérique, le rapport :

$$\frac{\omega_2}{\omega} = 1,0027 = \frac{10\,027}{10\,000}$$

qui se rapproche du rapport des durées du jour solaire moyen et du jour sidéral. Nous avons :

$$\frac{\omega_2}{\omega} = \frac{1}{2} \frac{ML + M_1 L_1}{ml},$$

si  $m = m_1$  et  $l = l_1$ , soit ici :

$$\frac{10\,027}{10\,000} = \frac{1}{2} \frac{ML + M_1 L_1}{ml}$$

ou

$$\frac{10\,027}{5\,000} = \frac{ML + M_1 L_1}{ml}.$$

Faisons  $ml = 5000$  en choisissant  $m = 50$  et  $l = 100$ . Il nous reste à résoudre l'équation :

$$ML + M_1L_1 = 10\,027.$$

Admettons les valeurs suivantes pour  $M$  et  $M_1$  :

$$M = 74, \quad M_1 = 111.$$

Nous choisissons ces valeurs qui sont des multiples de 37 parce que le facteur 37 est contenu dans 10 027. L'équation devient :

$$74L + 111L_1 = 10\,027$$

ou

$$2L + 3L_1 = 271.$$

En calculant suivant la méthode connue, nous obtenons :

$$2L = 271 - 3L_1,$$

$$L = 135 - L_1 + \frac{1 - L_1}{2} = 135 - L_1 + a,$$

en posant :

$$\frac{1 - L_1}{2} = a.$$

Nous aurons donc :

$$L_1 = 1 - 2a$$

et

$$L = 134 + 3a.$$

Nous obtenons des valeurs entières et positives de  $L$  et  $L_1$  pour toutes les valeurs entières de  $a$  comprises entre 0 et  $-44$ ; ainsi pour :

$$\begin{array}{lll} a = 0, & L = 134, & L_1 = 1; \\ a = -1, & L = 131, & L_1 = 3; \\ a = -10, & L = 104, & L_1 = 21; \\ a = -20, & L = 74, & L_1 = 41; \\ a = -25, & L = 59, & L_1 = 51. \end{array}$$

Le problème serait résolu en choisissant les nombres de dents suivants :

$$\begin{array}{ll} M = 74, & M_1 = 111, \\ L = 59, & L_1 = 51, \\ m = 100, & m_1 = 100, \\ l = 50, & l_1 = 50. \end{array}$$

**Solution du même problème au moyen des engrenages différentiels plans.** — Dans une horloge du XVI<sup>e</sup> siècle figure le mécanisme



suivant pour marquer, sur un cadran mobile, la position du Soleil sur l'écliptique. L'aiguille indicatrice doit faire un tour par an par rapport au cadran qui porte les signes du zodiaque. Le cadran  $G$  (fig. 113) tourne dans le même sens que l'aiguille  $z$ , mais à une autre vitesse, de sorte que  $z$  qui, sur un cadran fixe, montrerait l'heure de temps moyen, indique ici l'avance de l'heure sidérale sur l'heure de temps moyen.

Un arbre  $O$  porte une roue  $B$  et l'aiguille  $z$ ; ces trois organes solidaires font un tour en un jour solaire moyen. La roue  $B$  engrène dans une roue  $H$  portée par un arbre  $O_1$  sur lequel est fixée une roue  $I$ ; les deux roues solidaires  $H$  et  $I$  ont chacune 38 dents. La roue  $I$  engrène dans une roue  $A$  solidaire de la roue  $C$ ;  $A$  et  $C$  sont folles sur l'arbre  $O$ .  $C$  engrène dans  $D$  qui se trouve sur le même arbre que la roue  $E$ ; celle-ci entraîne la roue  $F$  portant le cadran mobile  $G$  et folle sur l'arbre  $O$ . L'arbre portant les roues  $D$  et  $E$  traverse la roue  $B$ ; il est donc entraîné par cette roue et fait aussi un tour autour de l'arbre  $O$  en un jour solaire moyen.

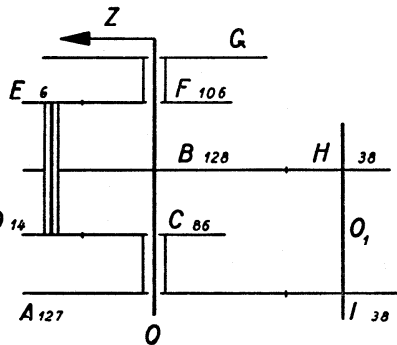


Fig. 113

Les nombres de dents des différentes roues sont :

|                       |                      |
|-----------------------|----------------------|
| roue $B = 128$ dents, | roue $C = 86$ dents, |
| » $H = 38$ »          | » $D = 14$ »         |
| » $I = 38$ »          | » $E = 6$ »          |
| » $A = 127$ »         | » $F = 106$ »        |

Calculons la vitesse angulaire  $\omega_1$  de  $A$  (ou de  $C$ ); puisque celle de  $B$  peut être exprimée par 1, nous aurons :

$$\omega_1 = 1 \cdot \frac{128 \cdot 38}{38 \cdot 127} = \frac{128}{127}.$$

Appliquons la formule de Willis pour l'engrenage différentiel composé des roues  $C$ ,  $D$ ,  $E$  et  $F$ ; l'arbre des roues  $D$  et  $E$  fait un tour autour de l'arbre  $O$  en un jour solaire moyen. Nous avons donc :

$$\omega_2 = 1.$$

La raison  $r$  de l'engrenage est :

$$r = \frac{86 \cdot 6}{14 \cdot 106} = \frac{129}{371}.$$

La vitesse angulaire de  $F$  est  $\omega_0$ ; d'après la formule de Willis :

$$\omega_0 = \omega_1 r + \omega_2 (1 - r) = \frac{128}{127} \cdot \frac{129}{371} + 1 \left( 1 - \frac{129}{371} \right) = \frac{47\,246}{47\,117}$$

ou

$$\omega_0 = 1,002\,737\,865.$$

L'année comprend 365,2422 jours solaires moyens et 366,2422 jours sidéraux. Le rapport de ces deux nombres est :

$$\frac{366,2422}{365,2422} = 1,002\,737\,909.$$

Le rapport réalisé par l'engrenage différentiel que nous venons de décrire est trop petit de

$$0,000\,000\,044 = 44 \cdot 10^{-9},$$

c'est-à-dire que le cadran  $G$  reste chaque année en retard de  $44 \cdot 10^{-9}$  an, ce qui fait :

$$44 \cdot 10^{-9} \cdot 365,2422 = 0,000\,016\,070\,656\,8 \text{ jour solaire moyen}$$

ou

$$0,000\,016\,070\,656\,8 \cdot 86\,400 = 1,3885 \text{ seconde de temps moyen.}$$

## CHAPITRE VI

### TRANSMISSION DE L'ÉNERGIE PAR LES ROUES DENTÉES

**Le module.** — Dans le chapitre précédent, on a défini le diamètre primitif d'une roue dentée et son pas circonférentiel désigné généralement sous le nom de pas ; ce dernier est le quotient de la longueur de la circonférence primitive par le nombre des dents.

On est appelé à considérer parfois le *pas angulaire*  $p_a$  défini par l'équation :

$$p_a = \frac{2\pi}{z}$$

ou

$$p_a = \frac{360^\circ}{z}.$$

Le pas angulaire est un angle ; il est exprimé en radians dans la première équation et en degrés dans la deuxième. On pourrait aussi l'exprimer en grades d'après la relation :

$$p_a = \frac{400^{\text{gr}}}{z}.$$

Il est facile de comprendre les relations suivantes :

$$p = p_a r \quad \text{ou} \quad p_a = \frac{p}{r}.$$

Il est parfois commode d'envisager le rapport entre le diamètre primitif d'une roue dentée et le nombre des dents ; ce rapport est le *module* de la roue ; on le désignera par  $m$ . D'après la définition, on a :

$$m = \frac{d}{z}. \quad (32)$$

Puisque  $p = \frac{\pi d}{z}$ , on a :

$$p = m\pi \quad (33)$$

ou

$$m = \frac{p}{\pi}.$$

Comme le pas  $p$ , le module  $m$  est une longueur.

Le module et le nombre des dents d'une roue permettent de calculer le pas, le diamètre primitif, le pas angulaire.

Puisque deux roues dentées engrenant l'une dans l'autre ont le même pas, elles ont aussi le même module.

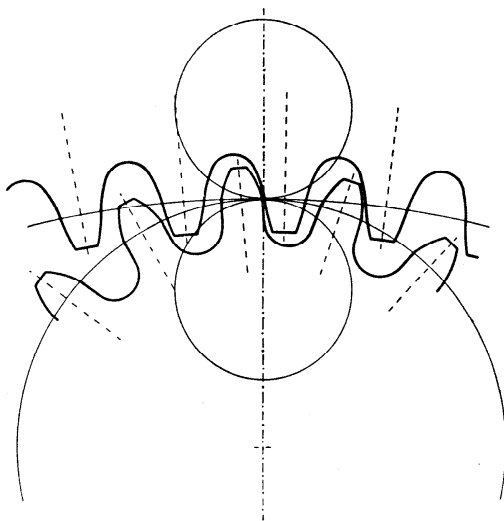


Fig. 114

Les nombres des dents et le module caractérisent l'engrenage. Si les nombres des dents des roues sont  $z_1$  et  $z_2$ , leurs rayons primitifs  $r_1$  et  $r_2$ , et le module  $m$ , on a :

$$r_1 = \frac{mz_1}{2}, \quad r_2 = \frac{mz_2}{2}.$$

La distance des centres  $c$  doit être, pour un engrenage extérieur :

$$c = r_1 + r_2 = m \frac{z_1 + z_2}{2} \quad (34)$$

et, pour un engrenage intérieur (fig. 114) :

$$c = r_1 - r_2 = m \frac{z_1 - z_2}{2}. \quad (35)$$

Le cas intermédiaire entre l'engrenage intérieur et l'engrenage extérieur est la *crémaillère* dont l'une des roues a un rayon infiniment grand ; le nombre des dents et la distance des centres le sont aussi. Cependant les dimensions de l'engrenage à crémaillère sont définies si l'on connaît le nombre  $z_2$  des dents du pignon et son module  $m$ .

**La transmission de l'énergie.** — Soient deux roues dentées de module  $m$  et dont les centres sont en  $O_1$  et  $O_2$  (fig. 115) ; leurs nombres de dents sont  $z_1$  et  $z_2$ , leurs rayons primitifs  $r_1$  et  $r_2$ .

La roue  $O_1$  entraîne le pignon  $O_2$ . Envisageons le moment où le contact entre la dent  $D$  de la roue et la dent  $d$  du pignon est en  $A$ , point de tangence des circonférences primitives. La pression exercée sur la dent  $d$  est perpendiculaire à  $O_1O_2$  ; elle est appliquée au point  $A$  ; appelons-la  $P$ . Son moment par rapport à  $O_2$  est  $Pr_2$ . Mais la dent  $d$  réagit et s'il y a équilibre, la pression  $P'$  est égale à  $P$ .

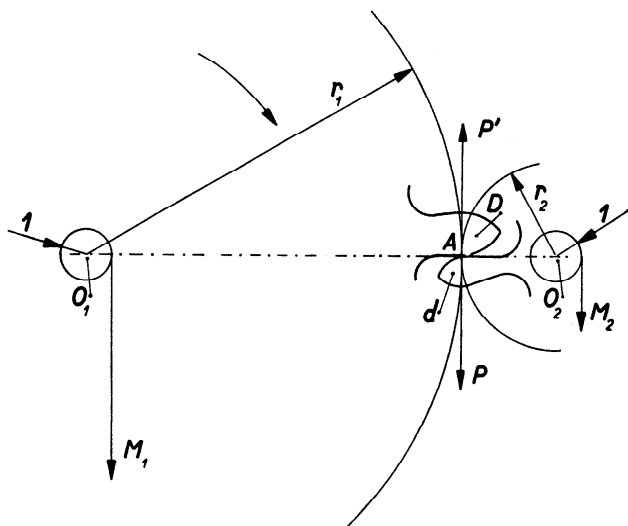


Fig. 115

Supposons que la roue  $O_1$  soit entraînée par un poids  $M_1$  suspendu à une poulie de rayon 1 mm (nous exprimons les longueurs en mm). La roue  $O_1$  est empêchée de tourner par la réaction  $P'$  de la dent  $d$  qui est provoquée par un poids  $M_2$  agissant sur une poulie de 1 mm ; les valeurs  $M_1$  et  $M_2$  sont aussi celles des moments par rapport aux axes  $O_1$  et  $O_2$ . Une roue est en équilibre si par rapport à son centre la somme des

moments des forces agissant sur elle est nulle. Les équations d'équilibre sont, pour la roue  $O_1$  :

$$M_1 - P'r_1 = 0$$

et, pour la roue  $O_2$  :

$$M_2 - P r_2 = 0.$$

Puisque  $P = P'$ , nous avons :

$$\frac{M_1}{r_1} = \frac{M_2}{r_2},$$

soit :

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}. \quad (36)$$

$M_1$  est le moment de la force motrice,  $M_2$  le moment de la force transmise.

Lorsque le contact des dents a lieu sur la ligne des centres des deux roues, l'équilibre est établi quand le moment moteur est au moment transmis comme le rayon primitif de la roue menante est au rayon primitif de la roue menée.

Une roue (ou un levier quelconque) sur laquelle la somme des moments des forces agissantes est égale à zéro est en équilibre statique ou dynamique ; si elle est au repos, elle reste dans cet état ; si elle est en mouvement, sa vitesse est uniforme ; il n'y a pas d'accélération.

Pour que la vitesse soit transmise uniformément d'une roue à l'autre, il faut que la condition d'équilibre (36) soit remplie ; les moments des forces agissant sur les roues doivent être entre eux comme les rayons primitifs ou encore comme les nombres des dents.

**Contact en dehors de la ligne des centres.** — Supposons (fig. 116) que le contact des dents ait lieu en  $B$ . La pression normale  $P$  de la dent de la roue sur celle du pignon est perpendiculaire à  $O_2B$ .

Les conditions d'équilibre des deux roues sont :

$$M_1 - P' \cdot O_1C = 0, \quad M_2 - P \cdot O_2B = 0, \quad P = P';$$

c'est dire que :

$$\frac{M_1}{O_1C} = \frac{M_2}{O_2B}$$

ou

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{O_1C}{O_2B}.$$

Lorsque le contact a lieu sur la ligne des centres, nous avons :

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Pour que la transmission de l'énergie se fasse dans les mêmes conditions, il faut que :

$$\frac{O_1C}{O_2B} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Cette équation est exacte lorsque la normale commune en  $B$  aux deux profils passe par le point  $A$ .

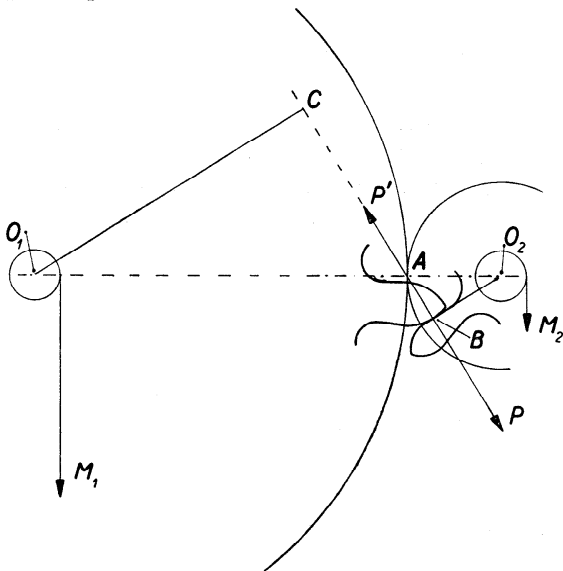


Fig. 116

Dans les déductions précédentes, nous avons supposé que seules les forces  $M_1$  et  $M_2$  agissent sur les roues ; en réalité, certaines résistances que nous ne pouvons pas supprimer — le frottement des dents les unes sur les autres, le frottement des pivots dans les coussinets — modifient les conditions d'équilibre.

Nous pouvons cependant formuler la loi suivante : *abstraction faite des résistances telles que le frottement, deux roues dentées sont aptes à transmettre l'énergie d'une façon uniforme si, à tout moment, la normale commune aux surfaces en contact passe par le point de tangence des circonférences primitives des deux roues.*

**Transmission de la vitesse.** — Appelons  $\omega_1$  et  $\omega_2$  les vitesses angulaires des deux roues au moment du contact sur la ligne des centres (fig. 115). Considérons un instant infiniment court pendant lequel l'une des roues entraîne l'autre. Nous pouvons admettre que pendant ce temps le point

de contact sur chaque profil reste le même : l'un décrit un arc infiniment petit  $ds_1$  de la circonférence primitive de la roue ; l'autre, un arc infiniment petit  $ds_2$  de la circonférence primitive du pignon. Nous avons :

$$ds_1 = \omega_1 r_1 dt ; \quad ds_2 = \omega_2 r_2 dt .$$

Mais  $ds_1 = ds_2$ , d'où :

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2 ,$$

soit :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} .$$

Dans ce cas, les vitesses angulaires sont dans le rapport inverse des rayons primitifs ou dans le rapport inverse des nombres de dents.

Si le contact a lieu en  $B$  (fig. 116), nous pouvons considérer que le mouvement infiniment petit de durée  $dt$  a lieu suivant la normale en  $B$ , donc :

$$ds_1 = \omega_1 \cdot O_1 C \cdot dt, \quad ds_2 = \omega_2 \cdot O_2 B \cdot dt ,$$

d'où :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 B}{O_1 C} .$$

Si la normale passe par le point  $A$ , nous aurons :

$$\frac{O_2 B}{O_1 C} = \frac{r_2}{r_1}$$

et, par conséquent :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} . \quad (37)$$

Lorsque le contact a passé de  $A$  à  $B$ , le rapport des vitesses angulaires n'a pas été modifié. Si  $\omega_1$  conserve la même valeur, il en sera de même de  $\omega_2$ .

Nous pouvons déduire la même équation (37) en appliquant le *principe des travaux virtuels* : la somme des travaux virtuels des forces agissant sur deux leviers en équilibre est nulle pour un très petit déplacement pendant lequel le contact n'est pas rompu.

L'équilibre des deux roues est réalisé si les forces  $P$  et  $P'$  sont égales. Quand le contact a lieu sur la ligne des centres, les travaux de  $P$  et  $P'$  pendant le temps  $dt$  sont respectivement :

$$Pr_1 \omega_1 dt \quad \text{et} \quad P'r_2 \omega_2 dt ,$$

d'où nous tirons :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1} .$$



Si le contact a lieu en  $B$  (fig. 116), les travaux de  $P$  et  $P'$  sont respectivement :

$$P\omega_1 \cdot O_1C \cdot dt \quad \text{et} \quad P'\omega_2 \cdot O_2B \cdot dt,$$

d'où :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2B}{O_1C}.$$

Si la normale commune passe par le point  $A$ , nous avons :

$$\frac{O_2B}{O_1C} = \frac{r_2}{r_1},$$

donc :

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1},$$

ce qui est la relation (37) précédemment trouvée.

*Si, pendant l'engrenage de deux roues dentées, la normale commune aux surfaces en contact passe par le point de tangence des circonférences primitives, la vitesse sera transmise régulièrement d'une roue à l'autre; à tout instant le rapport des vitesses angulaires sera inverse de celui des rayons primitifs ou des nombres de dents des deux roues.*

La condition de transmission régulière de la vitesse est la même que celle qui doit être remplie pour que l'énergie soit transmise régulièrement.

Cette condition ne peut donc pas être remplie par des roues dont les dents sont de formes quelconques. Nous exposerons quelques méthodes permettant de déterminer des profils conjugués de façon à remplir la condition de transmission régulière de l'énergie.

D'une manière générale, nous chercherons à résoudre le problème suivant : *un profil attaché à une roue étant donné, chercher le profil correspondant de l'autre roue, tel que, l'un entraînant l'autre, la normale commune aux surfaces en contact passe constamment par le point de tangence des circonférences primitives.*

**Détermination des profils : méthode graphique.** — Soit (fig. 117) le profil  $BAC$  attaché à la roue  $O_2$ . D'un point quelconque de la circonférence de centre  $O_2$ , abaissons  $D_2G$  perpendiculaire à la courbe  $BAC$ ; cette normale fait l'angle  $GD_2O_2$  avec le rayon  $O_2D_2$ . Quand  $O_2D_2$  aura tourné autour de  $O_2$  et sera en  $O_2A$ , le point  $G$  sera en  $H$  défini par les relations :

$$AH = D_2G, \quad \sphericalangle O_2AH = \sphericalangle O_2D_2G.$$

Portons sur la circonférence de centre  $O_1$  et de rayon  $r_1$  :

$$\text{arc } AD_1 = \text{arc } AD_2.$$

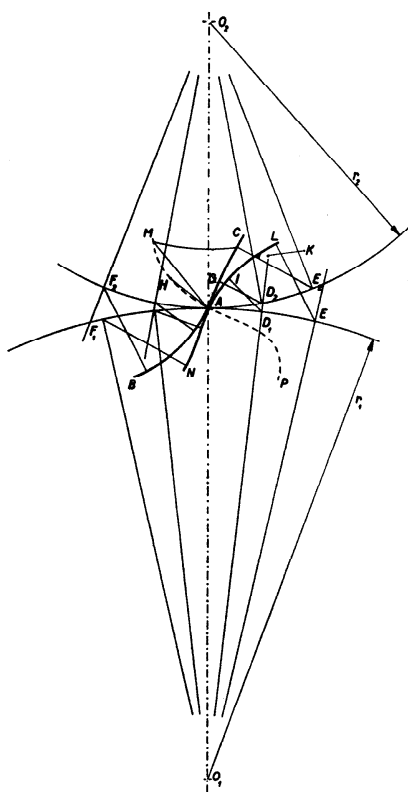


Fig. 117

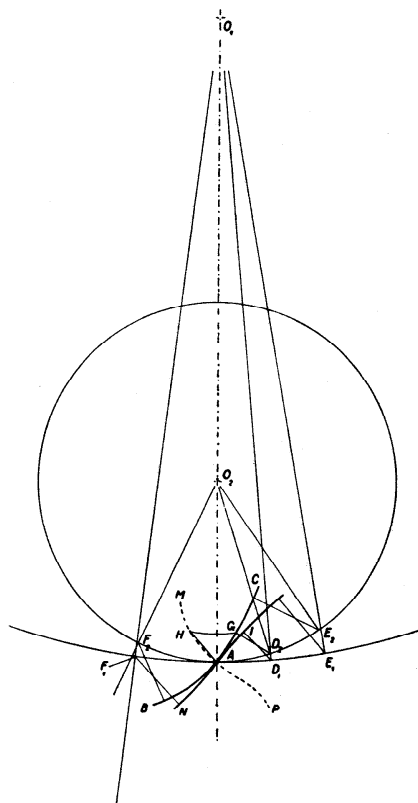


Fig. 118

Quand  $D_2$  sera en  $A$ , il en sera de même de  $D_1$ ; le contact des deux profils conjugués sera en  $H$ ; la normale au profil cherché sera correcte si elle se confond avec la normale  $HA$ . Ramenons les cercles à la position primitive; la normale en  $D_1$  sur la courbe cherchée doit faire avec le rayon  $O_1D_1$  le même angle que la normale en  $D_2$  fait avec le rayon  $O_2D_2$ .

Le point  $I$  du profil cherché sera défini par :

$$D_1I = D_2G, \quad \angle ID_1K = \angle GD_2O_2.$$

Quand  $O_1D_1$  sera en  $O_1A$ , le point  $I$  sera en  $H$ , point commun aux deux courbes. Le point  $H$  est un point où le contact des deux profils aura lieu : c'est un point du lieu géométrique des points de contact, c'est-à-dire de la *ligne d'engrènement*. Le point  $I$  est un point du profil cherché.

Nous trouverons d'autres points par le même raisonnement et la même construction. Nous pouvons cependant ne pas déterminer le point  $H$  et la

ligne d'engrènement et obtenir d'emblée autant de points du profil cherché qu'on voudra. Nous tracerons la courbe *NAIL* qui est le profil conjugué de *BAC*. La ligne d'engrènement est la courbe *PAHM*.

La construction se fait de la même manière lorsque l'engrenage est intérieur (fig. 118).

**Méthode de Reuleaux.** — Reprenons (fig. 119) le profil *BAC* attaché à la roue  $O_2$  et dessinons sur les circonférences primitives les points  $D_2, E_2, F_2$  et  $D_1, E_1, F_1$  tels que :

$$\text{arc } AD_2 = \text{arc } AD_1,$$

$$\text{arc } AE_2 = \text{arc } AE_1,$$

...

Abaissons de  $D_2$  la normale  $D_2G$  sur le profil donné et décrivons de  $O_2$  comme centre un arc de circonférence passant par  $G$ . De  $A$  comme centre décrivons un arc de circonférence de rayon  $D_2G$ ; ces deux arcs se coupent en  $H$  qui est le point de contact des deux profils, puisque la normale commune doit passer par  $A$ . En reportant le point  $H$  sur un arc de circonférence de centre  $O_1$  et en décrivant de  $D_1$  un arc de circonférence de rayon égal à  $D_2G$ , nous déterminons le point d'intersection  $I$  qui appartient au profil cherché *NAIL*. Nous obtenons aussi la ligne d'engrènement *PAHM*.

Cette méthode ressemble à la précédente; elle donne la ligne d'engrènement et a l'avantage de ne pas nécessiter de reports d'angles. Les deux méthodes utilisent les normales au profil donné, pour trouver les points du profil conjugué de façon que la condition de transmission régulière de l'énergie soit remplie.

**Méthode des enveloppes.** — Des deux roues  $O_1$  et  $O_2$  (fig. 120), nous supposons l'une,  $O_1$ , fixe et l'autre tournant autour du centre  $O_1$  avec le profil donné qui lui est propre, mais avec une vitesse égale et de sens contraire à celle que la roue  $O_1$  aurait naturellement. Si  $O_1$  tourne dans le sens de la flèche 1, nous supposons que  $O_2$  tourne dans le sens de la flèche 2 et à la même vitesse. Quand  $O_2$  aura roulé sur la circonférence  $(O_1, r_1)$  de façon que le point de contact des circonférences soit en  $B$ , le point  $A$

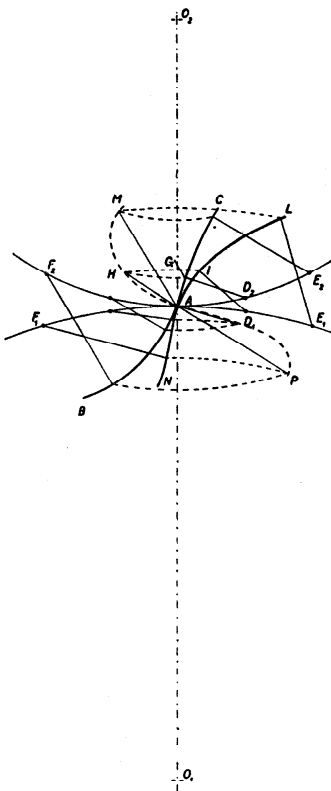


Fig. 119

sera en  $A'$  et l'arc  $AA'$  sera un arc d'épicycloïde. Soit une figure (ici un petit cercle) liée à  $O_2$  : son centre sera en  $A$ , puis en  $A'$ . Traçons la courbe  $CC'$  tangente aux deux positions du petit cercle. Au point  $C'$  la normale passe nécessairement par  $B$  qui, à ce moment, est le centre instantané de rotation de la circonférence  $O_2$  roulant sur  $O_1$ . La courbe « enveloppe » remplit donc la condition requise pour la transmission régulière de l'énergie.

La figure 120 représente la construction de l'engrenage à lanterne ou à fuseaux. Les dents de la roue  $O_2$  sont des chevilles rondes en

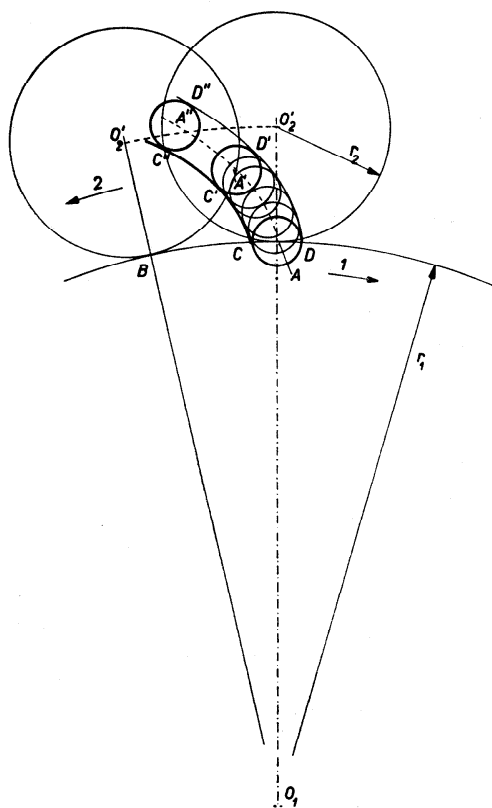


Fig. 120

acier, appelées fuseaux. Le centre  $A$  du fuseau décrit une épicycloïde; le profil conjugué, enveloppe des positions successives du fuseau, est une courbe  $CC'C''$  parallèle à l'épicycloïde décrite par le point  $A$ .

Nous voyons qu'il y a aussi une enveloppe extérieure  $DD'D''$  qui pourrait conduire le fuseau, le contact se faisant sur la partie concave de la courbe.

#### Méthode des roulettes. —

On obtient des profils satisfaisant à la condition de transmission régulière de l'énergie en faisant rouler une figure quelconque sur les circonférences primitives des deux roues.

Soit (fig. 121) une figure quelconque  $ABC$  roulant sur la circonférence primitive de la roue  $O_1$  et à l'intérieur de la circonférence primitive de la roue  $O_2$ .  $D$  est un point

solidaire de  $ABC$ ; il décrit, en roulant à l'extérieur de la roue  $O_1$ , une courbe  $EDF$  et, en roulant à l'intérieur de  $O_2$ , une courbe  $HDI$ ; ces courbes ont un point commun  $D$ . En ce point, les courbes ont en commun un arc de circonférence infiniment petit de centre  $A$  et de rayon

*AD*. La normale commune aux courbes en *D* est le rayon *DA* aboutissant au point *A*, centre instantané de rotation de la figure *ABCD* au moment où les deux profils se touchent en *D*. Mais le centre instantané de rotation est le point de tangence des circonférences primitives des deux roues.

Pour obtenir les formes conjuguées convenant aux roues dentées, on choisira la figure *ABC* de façon qu'elle donne des courbes faciles à dessiner et à reproduire au moyen de fraises; il faut aussi que les dents ayant ces courbes comme profils soient solides.

La pratique a conduit à utiliser deux figures roulantes : le cercle et la droite; on a ainsi obtenu les *engrenages épicycloïdaux* et les *engrenages à développante*. Les premiers sont à peu près les seuls utilisés en horlogerie, tandis que les seconds sont préférés par les mécaniciens.

Les courbes engendrées dans les engrenages épicycloïdaux sont la cycloïde, l'épicycloïde et l'hypocycloïde dont les propriétés vont être rappelées.

**Propriétés de la cycloïde.** — La cycloïde est la courbe décrite par le point *A* de la circonférence d'un cercle qui roule sans glisser sur une droite *PP* (fig. 122).

Lorsque le centre de la circonférence se déplace de *O* en *O*<sub>1</sub>, le point de contact sur la droite passe de *A* à *B*. Sur la circonférence, le point *A* s'est déplacé en *A*<sub>1</sub>, de sorte que :

$$\text{arc } BA_1 = AB.$$

Pour obtenir *A*<sub>1</sub>, il suffit de porter sur la circonférence de centre *O*<sub>1</sub> des longueurs dont la somme est égale à *AB*; ces longueurs doivent être assez petites pour que l'erreur commise en reportant les cordes au lieu des arcs reste insensible.

Le point *A*<sub>1</sub> est un point de la cycloïde. Sa position est facile à déterminer si nous connaissons le rayon *r* de la circonférence génératrice et l'angle *θ* dont a tourné le rayon *OA* depuis le moment où le point *A* était sur la droite. Ce dernier point *A* est considéré comme l'origine de la cycloïde qui est une courbe *AA*<sub>1</sub>*A*<sub>2</sub>*A*<sub>3</sub>*A*<sub>4</sub>; chaque fois qu'elle touche la droite *PP*, elle a un point de rebroussement.

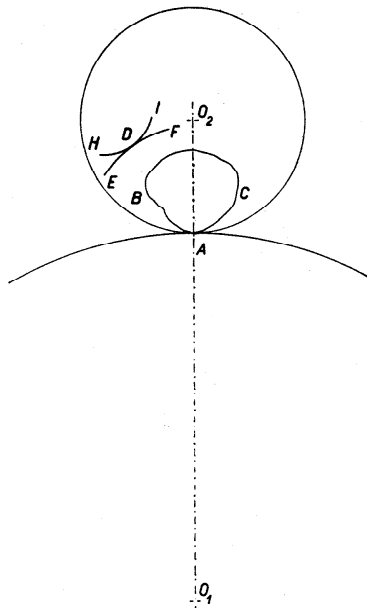


Fig. 121

Choisissons comme axes des coordonnées la droite  $PP$  et la perpendiculaire à cette droite à l'origine de la cycloïde.

La cycloïde est définie par les équations :

$$x = r(\theta - \sin \theta), \quad y = r(1 - \cos \theta), \quad (38)$$

dans lesquelles l'angle  $\theta$ , exprimé en radians, joue le rôle d'un paramètre.

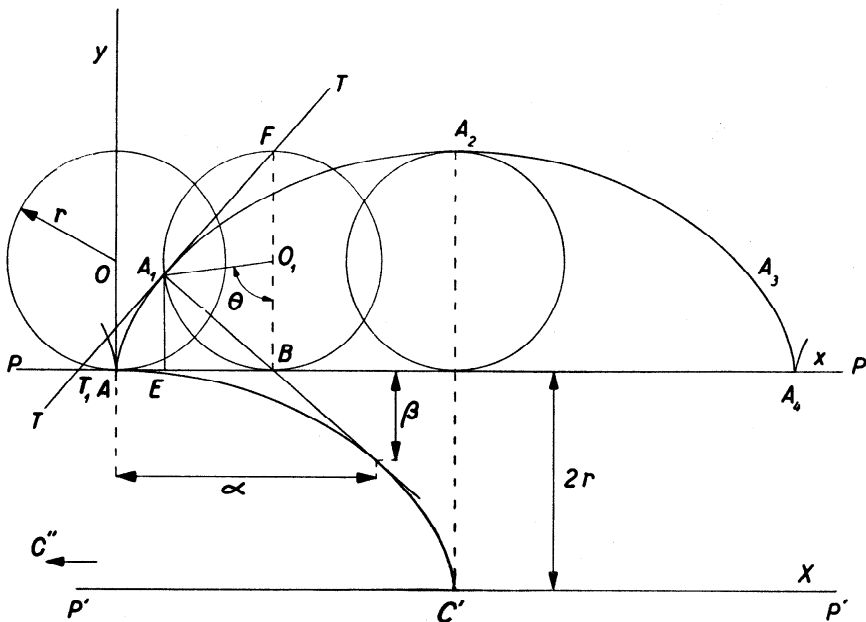


Fig. 122

D'après la construction de la cycloïde, il est évident que la normale en un point quelconque  $A_1$  de la cycloïde est la droite qui joint  $A_1$  au point de tangence  $B$  qui est le centre instantané de rotation. La droite  $A_1T$  perpendiculaire à  $A_1B$  est la tangente à la cycloïde au point  $A_1$ ; elle passe par le point  $F$  extrémité du diamètre  $BO_1F$ .

L'équation de la tangente à la cycloïde en un point  $(x_1, y_1, \theta_1)$  est :

$$y - y_1 = \frac{\sin \theta_1}{1 - \cos \theta_1} (x - x_1) = (x - x_1) \sqrt{\frac{2r}{y_1} - 1}.$$

L'équation de la normale en ce même point est :

$$y - y_1 = -\frac{1 - \cos \theta_1}{\sin \theta_1} (x - x_1) = -\frac{x - x_1}{\sqrt{\frac{2r}{y_1} - 1}}.$$

La longueur  $A_1 T_1$  de la tangente en  $A_1$  est donnée par :

$$A_1 T_1 = \frac{y_1}{\sin \theta_1} \sqrt{2(1 - \cos \theta_1)} = y_1 \sqrt{\frac{2r}{2r - y_1}}.$$

La longueur de la sous-tangente  $T_1 E$  vaut :

$$T_1 E = y_1 \frac{1 - \cos \theta_1}{\sin \theta_1} = \sqrt{\frac{y_1}{\frac{2r}{y_1} - 1}}.$$

La longueur  $A_1 B$  de la normale en  $A_1$  a pour valeur :

$$A_1 B = \frac{y_1}{1 - \cos \theta_1} \sqrt{2(1 - \cos \theta_1)} = \sqrt{2r y_1}.$$

Enfin la longueur de la sous-normale  $EB$  est :

$$EB = y_1 \frac{\sin \theta_1}{1 - \cos \theta_1} = \sqrt{2r y_1 - y_1^2}.$$

Le rayon de courbure  $\rho$  de la cycloïde au point  $(x_1, y_1)$  est :

$$\rho = 2r \sqrt{2(1 - \cos \theta_1)} = 2 \sqrt{2r y_1} = 2 A_1 B.$$

Le centre de courbure a pour coordonnées :

$$\alpha = r(\theta_1 + \sin \theta_1), \quad \beta = -r(1 - \cos \theta_1).$$

L'analogie de ces équations avec celles de la cycloïde est frappante. Choisissons un nouveau système de coordonnées  $X$  et  $Y$  d'après les relations :

$$\alpha = X - \pi r, \quad \beta = Y - 2r.$$

Les équations du centre de courbure pour ce nouveau système sont :

$$X - \pi r = r(\theta_1 + \sin \theta_1), \quad Y - 2r = -r(1 - \cos \theta_1)$$

ou

$$X = r[(\theta_1 + \pi) - \sin(\theta_1 + \pi)], \quad Y = r[1 - \cos(\theta_1 + \pi)].$$

Donc pour tous les centres de courbure, nous aurons :

$$X = r[(\theta + \pi) - \sin(\theta + \pi)], \quad Y = r[1 - \cos(\theta + \pi)].$$

Ces équations sont celles d'une cycloïde exprimée au moyen du paramètre  $\theta + \pi$ . Cette cycloïde est la développée de la première; elle est aussi engendrée par le roulement d'une circonférence de rayon  $r$  sur une droite  $P'P'$  parallèle à  $PP$  et distante d'elle de  $2r$  (puisque  $Y = \beta + 2r$ ); l'origine de la développée est en  $C''$ , puisque le paramètre est maintenant  $\theta + \pi$ . Le point  $C''$  est sur  $P'P'$ , de sorte que  $C''C' = 2\pi r$ .

Pour calculer la longueur  $l$  d'un arc de cycloïde compris entre l'origine  $A$  et le point  $A_1(x_1, y_1, \theta_1)$ , nous utiliserons la formule :

$$l = 4r \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{y_1}{2r}} \right] = 4r \left( 1 - \cos \frac{\theta_1}{2} \right).$$

La longueur  $L$  d'une arche cycloïdale ( $\theta_1 = 2\pi$ ) vaut :

$$L = 8r.$$

**Construction de la cycloïde.** — On construit généralement la cycloïde par points. Voici une méthode : on détermine sur la circonférence génératrice de centre  $O$  (fig. 123) des points  $1', 2', 3', 4'$ , etc., équidistants et

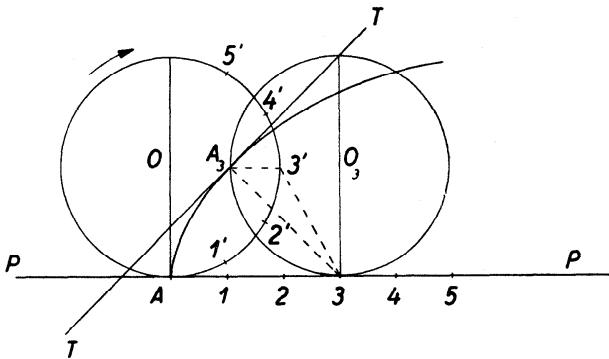


Fig. 123

assez rapprochés pour que l'arc  $A 1'$  puisse être considéré, sans erreur appréciable, comme un segment de droite. On porte cette même longueur  $A 1' = c$  sur la droite  $PP$  à partir du point  $A$  : on obtient les points équidistants 1, 2, 3, 4, etc. Quand la circonférence  $O$  roulera sur  $PP$  dans le sens de la flèche, les points  $1', 2', 3', 4'$ , etc... viendront successivement se placer en 1, 2, 3, 4, etc... En même temps le point  $A$  s'élèvera au-dessus de  $PP$  de la même quantité que les points  $1', 2', 3', 4'$ , etc... se seront abaissés.



Pour une construction très exacte, il faut tenir compte du fait qu'on a porté une valeur  $c$  égale à la corde et non à l'arc. Soit  $\alpha$  l'angle  $AO1'$ ,  $OA = r$  et  $A1 = c$ . L'arc  $A1'$  est égal à  $ra$ . Il faudrait calculer ainsi :

$$ra = c,$$

d'où :

$$\alpha = \frac{c}{r}.$$

Par conséquent :

$$\text{corde } A1' = 2r \sin \frac{\alpha}{2} = 2r \sin \frac{c}{2r}.$$

Pour obtenir la position du point  $A$  lorsque  $3'$  par exemple sera en  $3$ , on décrit de  $3$  comme centre un arc de circonférence de rayon  $A3'$ ; de  $A$  comme centre, on trace un arc de circonférence de rayon  $33'$ . Le point d'intersection  $A_3$  de ces deux arcs est le point cherché de la cycloïde.

La figure  $A33'A_3$  est un trapèze isocèle, puisque :

$$AA_3 = 33' \quad \text{et} \quad A3' = 3A_3.$$

Il est plus facile de dessiner la courbe aux abords d'un point si l'on peut tracer la tangente en ce point. Or, la droite  $A_33$  est la normale à la cycloïde au point  $A_3$ ;  $TA_3T$  est la tangente.

**Propriétés de l'épicycloïde.** — Lorsqu'un cercle roule sans glisser sur un autre cercle, un point de la circonférence du cercle roulant décrit une *épicycloïde*.

Les équations de l'épicycloïde en fonction du paramètre  $\theta$  exprimé en radians, qui est l'angle dont le cercle générateur a tourné depuis l'origine de la courbe, sont :

$$\begin{aligned} x &= (R + r) \sin \frac{r}{R} \theta - r \sin \frac{R + r}{R} \theta, \\ y &= (R + r) \cos \frac{r}{R} \theta - r \cos \frac{R + r}{R} \theta. \end{aligned} \tag{39}$$

$r$  désigne le rayon du cercle générateur,  $R$  le rayon du cercle fixe,  $x$  et  $y$  les coordonnées rectangulaires d'un point de l'épicycloïde par rapport à deux axes dont l'un passe par le centre du cercle fixe et par l'origine de l'épicycloïde et dont l'autre, perpendiculaire au premier, passe par le centre du cercle fixe.

Envisageons (fig. 124) deux positions  $O_1$  et  $O_2$  du cercle roulant et désignons par  $\alpha$  l'angle  $O_1OO_2$ . Nous avons :

$$\text{arc } AB = \text{arc } BC, \quad R\alpha = r\theta.$$

d'où :

$$\theta = \frac{R}{r} \alpha.$$

Les équations (39) peuvent être mises sous la forme :

$$\begin{aligned} x &= (R + r) \sin \alpha - r \sin \frac{R + r}{r} \alpha, \\ y &= (R + r) \cos \alpha - r \cos \frac{R + r}{r} \alpha. \end{aligned} \quad (40)$$

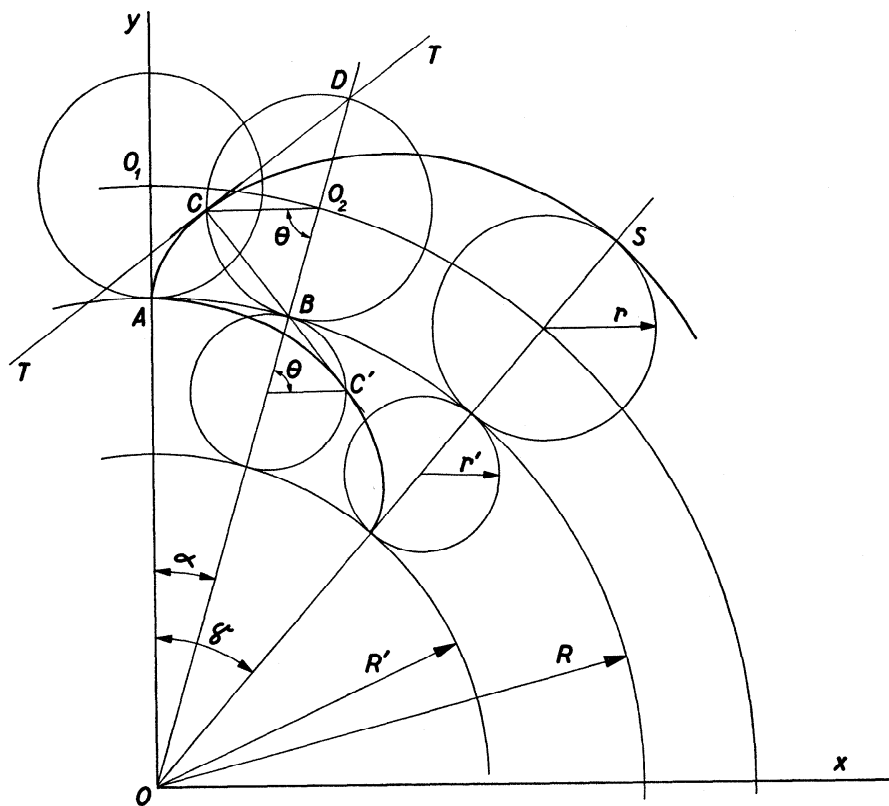


Fig. 124

Au point  $C$ , la normale à l'épicycloïde est  $CB$  puisque  $B$  est le centre instantané de rotation;  $TT$ , perpendiculaire à  $CB$ , est la tangente qui passe par le point  $D$  à l'extrémité du diamètre  $BO_2D$ .

Appelons  $S$  le sommet de l'épicycloïde; la développée de celle-ci a son sommet en  $A$  et son origine sur le rayon  $OS$ . Or, cette développée est une épicycloïde dont le rayon du cercle fixe est  $R'$  et le rayon du cercle générateur est  $r'$ . Appelons  $\gamma$  l'angle  $AOS$ . Nous aurons :

$$R\gamma = \pi r, \quad R'\gamma = \pi r'$$

ou

$$\frac{R}{r} = \frac{R'}{r'}. \quad (41)$$

Mais :

$$R' = R - 2r'. \quad (42)$$

Des équations (41) et (42) nous tirons, en éliminant  $r'$  :

$$R' = \frac{R^2}{R + 2r}.$$

Le point  $C'$ , où la normale  $CB$  touche la développée, est le centre de courbure de l'épicycloïde au point  $C$ ;  $CC'$  est le rayon de courbure  $\varrho$ . La longueur  $CC'$  est aussi celle de l'arc  $AC'$  de l'épicycloïde développée. Le calcul permet de prouver que :

$$\varrho = 4r \frac{R + r}{R + 2r} \sin \frac{\theta}{2}.$$

Appelons  $l$  la longueur de l'arc d'épicycloïde depuis l'origine jusqu'en  $C$ . Nous avons :

$$l = 4r \left(1 + \frac{r}{R}\right) \left(1 - \cos \frac{\theta}{2}\right). \quad (43)$$

La longueur  $L$  d'une arche épicycloïdale vaut :

$$L = 8r \left(1 + \frac{r}{R}\right).$$

**Cycloïde et épicycloïde.** — La cycloïde peut être considérée comme un cas particulier de l'épicycloïde : il suffit de rendre infiniment grand le rayon du cercle fixe pour passer de la deuxième courbe à la première.

Reprenons les équations de l'épicycloïde :

$$x = (R + r) \sin \frac{r}{R} \theta - r \sin \frac{R + r}{R} \theta,$$

$$y = (R + r) \cos \frac{r}{R} \theta - r \cos \frac{R + r}{R} \theta.$$

Dès que  $R$  devient très grand, nous pouvons écrire :

$$\sin r \frac{r}{R} \theta = \frac{r}{R} \theta, \quad \frac{R+r}{R} = 1, \quad \cos \frac{r}{R} \theta = 1.$$

Les équations de l'épicycloïde deviennent :

$$x = r(\theta - \sin \theta), \quad y - R = r(1 - \cos \theta).$$

Mais elles se rapportent à un système de coordonnées dont l'origine est au centre du cercle fixe. En déplaçant l'axe des  $x$  parallèlement à lui-même

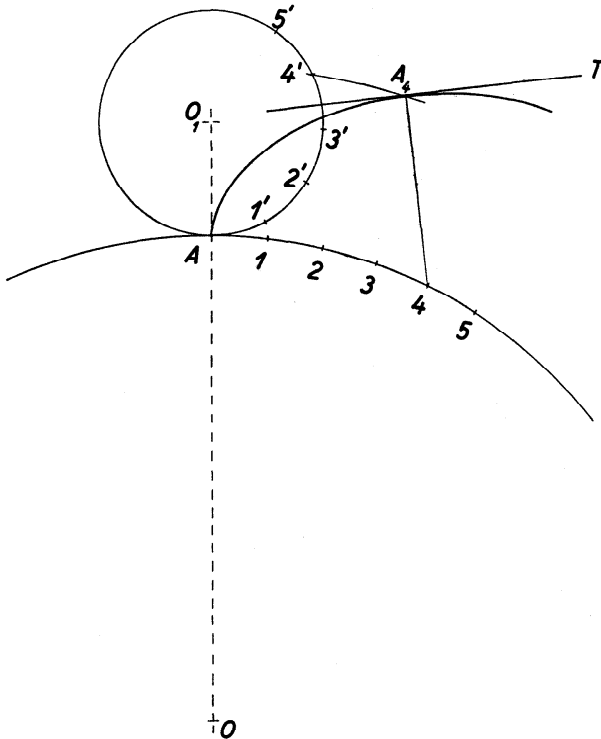


Fig. 125

de façon qu'il coïncide avec la droite sur laquelle roule le cercle générateur de la cycloïde, nous obtenons de nouvelles coordonnées  $x'$  et  $y'$  telles que :

$$x' = x, \quad y' = y - R.$$

Nous retrouvons ainsi les équations de la cycloïde :

$$x' = r(\theta - \sin \theta), \quad y' = r(1 - \cos \theta).$$

**Construction de l'épicycloïde.** — L'épicycloïde peut être construite point par point comme nous l'avons fait pour la cycloïde.

Soient (fig. 125)  $O$  et  $O_1$  les centres des cercles fixe et mobile dont le point de tangence est  $A$ . Déterminons les points 1, 2, 3, 4, etc..., 1', 2', 3', 4', etc... comme nous l'avons fait pour la cycloïde.

Le point  $A_4$  de l'épicycloïde est à l'intersection d'un arc de circonférence de centre 4 et de rayon  $AA_4'$  et d'un arc de circonférence de centre  $A$  et de rayon  $AA_4'$ . Les points 4' et  $A_4$  sont sur un arc de circonférence de centre  $O$  et de rayon  $OA_4'$ . La figure  $AA_4A_4'$  ressemble à un trapèze isocèle dont les bases seraient des arcs de circonférence de centre  $O$ .

La normale à l'épicycloïde au point  $A_4$  est  $A_4A$ ; la tangente  $A_4T$  est perpendiculaire à  $A_4A$ .

**Propriétés de l'hypocycloïde.** — Si le cercle mobile roule à l'intérieur du cercle fixe, la courbe décrite par un point de la circonférence du cercle roulant est une *hypocycloïde*. Elle est *allongée ou raccourcie* si le point décrivant la courbe se trouve à l'extérieur ou à l'intérieur de la circonférence du cercle générateur.

Les équations de l'hypocycloïde sont celles de l'épicycloïde dans lesquelles on a remplacé  $r$  par  $-r$ ; elles ont la forme :

$$\begin{aligned} x &= (R - r) \sin \frac{r}{R} \theta + r \sin \frac{R - r}{R} \theta, \\ y &= (R - r) \cos \frac{r}{R} \theta + r \cos \frac{R - r}{R} \theta. \end{aligned} \quad (44)$$

L'origine des coordonnées est le centre  $O$  du cercle fixe et l'axe des  $y$  passe par l'origine de l'hypocycloïde.

Exprimées en fonction de l'angle  $\alpha$  dont a tourné le rayon  $OO_1$  (fig. 126), les équations de l'hypocycloïde sont :

$$\begin{aligned} x &= (R - r) \sin \alpha - r \sin \frac{R - r}{r} \alpha, \\ y &= (R - r) \cos \alpha + r \cos \frac{R - r}{r} \alpha. \end{aligned} \quad (45)$$

La construction de l'hypocycloïde par points n'offre aucune difficulté; le point  $A_3$  est déterminé d'après les relations :

$$3A_3 = A3', \quad AA_3 = 33'.$$

$3A_3$  est la normale à l'hypocycloïde en  $A_3$ ;  $A_3T$  est la tangente à l'hypocycloïde en  $A_3$ ; elle est perpendiculaire à  $3A_3$ .

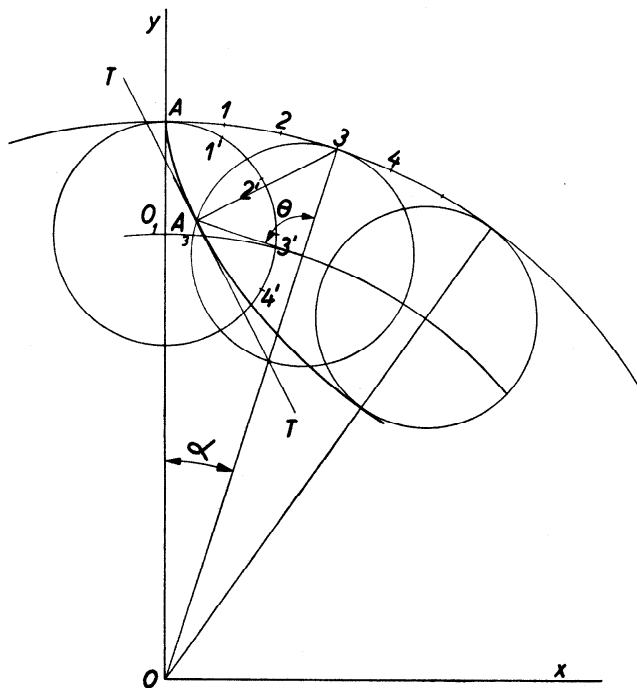


Fig. 126

**Un cas particulier de l'hypocycloïde.** — Lorsque la circonférence du cercle générateur passe par le centre du cercle fixe, nous avons :

$$r = \frac{R}{2}$$

et, par conséquent :

$$R - r = \frac{R}{2}, \quad \frac{r}{R} = \frac{1}{2}, \quad \frac{R - r}{r} = 1.$$

Les équations de l'hypocycloïde deviennent :

$$x = 0, \quad y = 2r \cos \alpha.$$

Ces équations sont satisfaites par les coordonnées des points de l'axe des  $y$  dont les ordonnées sont comprises entre 0 et  $2r$ ; l'hypocycloïde devient un diamètre du cercle fixe.

Cette propriété peut être établie de la façon suivante : soient (fig. 127)  $O_1$  et  $O_2$  les positions du centre du cercle mobile. Le point décrivant l'hypocycloïde est  $A$  ; il se trouve en  $B$  lorsque  $O_1$  a passé en  $O_2$ .  $B$  est sur la circonférence du cercle  $O_2$  ;  $A$  est sur la circonférence du cercle fixe. Nous avons, d'après la construction de l'hypocycloïde :

$$\text{arc } CB = \text{arc } CA,$$

$$r\theta = Ra$$

ou

$$a = \frac{r}{R} \theta = \frac{\theta}{2}. \quad (46)$$

$\alpha$  est un angle inscrit au cercle  $O_2$ ,  $\theta$  un angle au centre du même cercle. L'équation (46) est exacte si le point  $B$  est sur le diamètre  $OA$ .

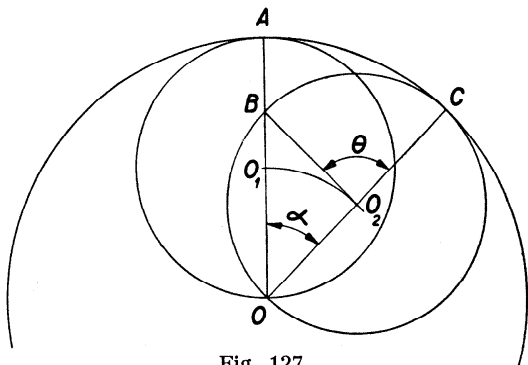


Fig. 127

**La développante du cercle.** — Parmi les engrenages utilisés en mécanique et parfois en horlogerie, on en rencontre à développante de cercle. Voici quelques propriétés de ce qu'on appelle communément la développante de cercle et qui est en réalité la *développante de la circonférence d'un cercle*. Pour simplifier le langage, on la désigne parfois par « développante » ; cette simplification n'est légitime que dans les cas où aucune confusion n'est possible.

Cette courbe est décrite par un point d'une droite qui roule sans glisser sur la circonférence d'un cercle.

La construction de cette développante découle de la définition.

Soit  $O$  (fig. 128) le centre d'un cercle ;  $AT$  la tangente à la circonférence en  $A$ . On porte sur la circonférence à partir de  $A$  des longueurs égales  $A1'$ ,  $1'2'$ ,  $2'3'$ , etc... déterminant des arcs assez courts pour pouvoir être considérés comme des segments rectilignes. On trace les tangentes à la circonférence aux points  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$ , etc... On considère la tangente  $T'T'$  au point  $3'$  par exemple. Au moment où  $AT$  est en  $T'T'$ , le point  $A$  est en un point  $B$  tel que :

$$3'B = \text{arc } A3'.$$

$B$  est un point de la développante décrite par le point  $A$  lorsque la droite  $AT$  roule sans glisser sur la circonférence du cercle  $O$ .

On peut de cette manière déterminer autant de points de la développante qu'on voudra ; en reliant ces points, on obtient la développante  $ABC$ .

La normale à la développante au point  $B$  est la droite  $B3'$ . Il est donc facile de dessiner la tangente en  $B$  pour faciliter le tracé de la courbe.

Dans un système de coordonnées rectangulaires dont l'origine est au centre du cercle développé et dont l'axe des  $y$  passe par l'origine de la développante, la développante de la circonférence de rayon  $R$  est définie par les équations paramétriques :

$$x = R \sin \theta - R\theta \cos \theta, \quad y = R \cos \theta + R\theta \sin \theta. \quad (47)$$

En partant des équations (47), on démontre qu'en un point pour lequel  $\theta = \theta_1$  le rayon de courbure  $\varrho$  est :

$$\varrho = R\theta_1.$$

La longueur d'un arc de développante, compris entre l'origine de la courbe ( $\theta = 0$ ) et un point pour lequel  $\theta = \theta_1$ , est :

$$s = R \frac{\theta_1^2}{2}. \quad (48)$$

La développante de la circonférence d'un cercle s'éloigne constamment de la circonférence ; elle ne présente ni point double ni point de rebroussement, comme la cycloïde et l'hypocycloïde, ni point d'inflexion.

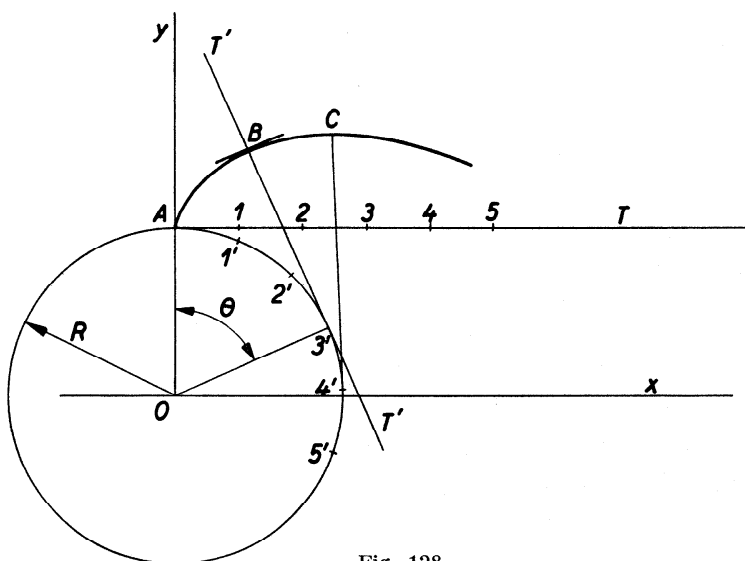


Fig. 128

**Détermination des profils de l'engrenage épicycloïdal.** — Les dents des roues d'un engrenage extérieur sont composées de deux parties : la *saillie* (parfois appelée l'excédent) qui dépasse la circonférence primitive,



et le  *pied*  qui reste à l'intérieur de cette circonférence. Dans les engrenages intérieurs, les saillies des dents d'une des roues sont à l'intérieur, et les pieds à l'extérieur de la circonférence primitive.

Deux dents consécutives sont séparées par un  *creux*  dans lequel pénètre une dent de l'autre roue (fig. 129).

La  *largeur d'une dent*  est mesurée sur la circonférence primitive ; il en est de même du  *vide*  ; la largeur et le vide forment ensemble le pas circonférentiel ou le pas ; ce sont des longueurs que nous exprimons en millimètres.

Une dent est conduite par une autre en partie avant et en partie après la ligne des centres.

Le profil d'une dent est composé de deux parties aboutissant toutes deux à la circonférence primitive : ce sont le  *flanc interne*  qui, dans les engrenages extérieurs, est à l'intérieur, et le  *flanc externe*  qui, dans ces mêmes engrenages, est à l'extérieur de la circonférence primitive.

Le flanc interne d'une dent de la roue menante conduit le flanc externe d'une dent de la roue menée.

Pour obtenir des profils conjugués, soit le flanc interne d'une dent qui travaille avec le flanc externe d'une dent de l'autre roue, nous utilisons la méthode des roulettes et faisons rouler un cercle de rayon  $\rho_1$  à l'intérieur de la circonférence primitive de la roue menante  $O_1$  (fig. 130), puis à l'extérieur de la circonférence primitive de la roue menée. Nous obtenons ainsi un arc d'hypocycloïde  $AB$  et un arc d'épicycloïde  $AC$  ; le premier arc donnera le flanc interne de la dent de la roue  $O_1$ , le second le flanc externe de la roue  $O_2$ .

En faisant rouler un autre cercle de rayon  $\rho_2$  à l'intérieur et à l'extérieur des circonférences primitives des deux roues, nous obtiendrons les arcs d'hypocycloïde  $AD$  et d'épicycloïde  $AE$ , qui donneront les flancs interne et externe des dents de  $O_2$  et de  $O_1$ .

Pour les engrenages d'horlogerie, et spécialement pour ceux du rouage, nous choisirons les rayons  $\rho_1$  et  $\rho_2$  de façon que les hypocycloïdes deviennent des droites (fig. 131) ; les flancs internes pour les deux roues sont des rayons  $AO_1$  et  $AO_2$  ; il suffit pour cela de faire :

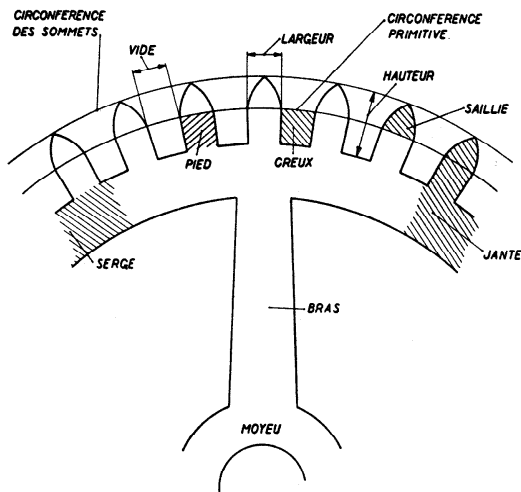


Fig. 129

$$\varrho_1 = \frac{r_1}{2}, \quad \varrho_2 = \frac{r_2}{2}.$$

Cet engrenage est appelé *engrenage épicycloïdal à flancs internes droits* ; il est facile à dessiner, à exécuter et à contrôler. Les flancs externes sont des arcs d'épicycloïde tels que  $AB$  et  $AC$ .

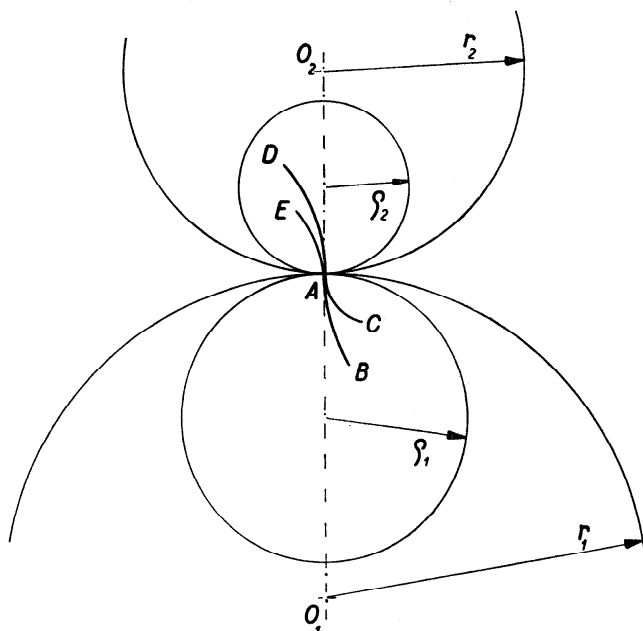


Fig. 130

**Le jeu et la formation des dents.** — Lorsque les profils sont déterminés, il y a lieu de limiter les dents. Il faut calculer la largeur des dents qui est une partie du pas ; le reste du pas est le vide.

On pourrait être tenté de faire sur les deux roues la dent égale à la moitié du pas ; les dents d'une roue s'emboîteraient parfaitement dans les creux de l'autre roue. Un tel engrenage ne fonctionnerait pas, car cette construction ne tient aucun compte des irrégularités du taillage, du jeu des pivots dans les coussinets, des erreurs dans la distance des centres ou dans les dimensions des roues et enfin de la dilatation des métaux provoquée par une élévation de la température ; le moindre grain de poussière aussi empêcherait les roues de tourner. Les facteurs qui viennent d'être mentionnés obligent à faire les vides d'une roue plus grands que la largeur des dents de l'autre roue.

On appelle *jeu* de l'engrenage, la différence entre le pas et la somme des largeurs des dents des deux roues ; le jeu est une longueur que l'on exprime en millimètres ou en fonction du pas ou du module.

On peut admettre pour le jeu  $j$  :

$$j = \frac{p}{6} = 0,523 \text{ m}.$$

Si, pour la roue menante, la largeur  $l_1$  de la dent et le vide sont égaux, cela signifie que, pour cette roue, on ne s'occupe pas du jeu. La largeur  $l_2$  de la roue menée sera :

$$l_2 = p - \frac{p}{2} - \frac{p}{6} = \frac{p}{3} = 1,047 \text{ m}.$$

Le pas, le vide, la largeur des dents et le jeu sont des longueurs d'arcs de la circonférence primitive. Lorsqu'on mesure la largeur d'une dent au micromètre, on mesure la corde, mais pour les roues d'horlogerie qui sont très petites, la différence entre l'arc et la corde est négligeable dans la pratique.

La denture de la roue menée sera faite de façon que la dent occupe  $1/3$  du pas et le vide  $2/3$ .

En règle générale, on a la relation :

$$p = l_1 + l_2 + j.$$

La répartition du jeu se fait d'après des considérations pratiques. Dans les engrenages du rouage des montres, on a de grandes roues en laiton entraînant des pignons en acier trempé beaucoup plus petits. Il est logique de prendre le jeu exclusivement sur le pignon. Mais le jeu dépend du nombre de dents  $z_2$  du pignon. On choisit souvent :

$$j = \frac{p}{6} = 0,523 \text{ m}$$

lorsque  $z_2 \leq 10$ , et

$$j = \frac{p}{10} = 0,314 \text{ m}$$

lorsque  $z_2 > 10$ .

Dans les engrenages du remontoir, par exemple dans celui de la couronne et du rochet, la force à transmettre est relativement grande ; elle dépend du moment élastique du ressort moteur qui est d'autant plus grand que la montre est plus grande. Aussi utilise-t-on des roues en acier



Pour rendre les dents plus solides, on limite parfois le creux par un arc de circonférence de centre  $M$  (fig. 132) et de rayon  $\varrho$  reliant les deux flancs internes. Connaissant  $MO$  et l'angle  $\alpha$  formé par les deux flancs rectilignes, on a :

$$\varrho = MO \sin \frac{\alpha}{2}.$$

Souvent, on se donne le rayon  $r_0$  qui correspond à la plus grande profondeur du creux ; on a :

$$\varrho = (r_0 + \varrho) \sin \frac{\alpha}{2},$$

d'où :

$$\varrho = \frac{r_0 \sin \frac{\alpha}{2}}{1 - \sin \frac{\alpha}{2}}.$$

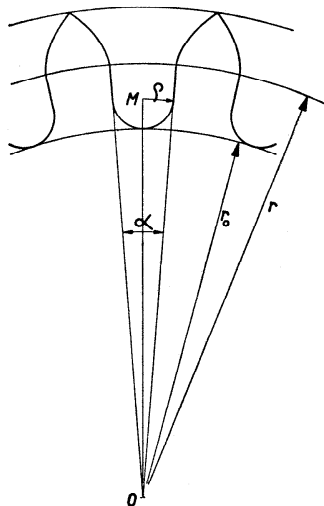


Fig. 132

Le rayon  $r_0$  ou la circonférence de base doivent être choisis de façon qu'il y ait un jeu entre la pointe de la dent et le fond du creux ; ce jeu, la *sûreté radiale*, est la plus petite distance qui sépare les sommets des dents d'une roue de la circonférence de base de l'autre roue. Il est généralement donné en fonction du module. Ainsi pour les pignons menés, les normes horlogères recommandent une sûreté radiale égale à 0,4  $m$ .

On possède donc tous les éléments permettant de dessiner les dents des deux roues, puisqu'on connaît les nombres de dents  $z_1$  et  $z_2$  et le module.

**La ligne d'engrènement dans l'engrenage épicycloïdal.** — Dessinons (fig. 133) deux roues à dentures épicycloïdales de façon que le contact entre la saillie d'une dent et le flanc interne de l'autre dent ait lieu en dehors de la ligne des centres, par exemple en  $B$ . La transmission de l'énergie est régulière si la normale commune en  $B$  passe par le point de tangence  $A$  des circonférences primitives des deux roues. L'angle  $ABO_2$  est droit si  $B$  est sur la circonférence du cercle générateur  $O_2'$ .

Le lieu des points de contact après la ligne des centres est un arc de la circonférence du cercle générateur  $O_2'$ . De même le lieu des points de contact avant la ligne des centres est un arc de la circonférence  $O_1'$ .

Le dernier point de contact est le point d'intersection de la circonférence des sommets de la roue menante et de la circonférence du cercle



**Calcul du rayon total de la roue.** — Le rayon total d'une roue dentée est le rayon qui aboutit au sommet d'une dent : c'est, dans la figure 133, le rayon  $O_1E$  que nous désignerons par  $R_1$ .

Appelons  $\delta$  (en radians ou en degrés) l'angle formé par  $O_1E$  et le flanc interne de la dent ; dans le cas représenté par la figure 133 :

$$\delta = \frac{2\pi}{4z_1} = \frac{\pi}{2z_1},$$

puisque la dent occupe la moitié du pas.

Le rayon primitif de la roue est  $r_1$  ; le rayon du cercle générateur de l'épicycloïde  $AE$  est  $r'_2$ . Dans le triangle  $O_1EO'_2$ , nous avons :

$$\frac{R_1}{r'_2} = \frac{\sin \theta}{\sin \gamma} = \frac{\sin \frac{r_1}{r'_2} \alpha}{\sin \gamma}.$$

Mais  $\alpha = \gamma + \delta$ . Donc :

$$R_1 = r'_2 \frac{\sin \frac{r_1}{r'_2} (\gamma + \delta)}{\sin \gamma}. \quad (49)$$

Cette équation renferme deux inconnues  $R_1$  et  $\gamma$ . Nous trouvons une deuxième équation en égalant les deux valeurs de  $EH$  (perpendiculaire à  $O_1O'_2$ ) calculées dans les triangles  $O_1EH$  et  $O'_2EH$ . Nous obtenons :

$$EH = O_1H \operatorname{tg} \gamma = (r_1 + r'_2 - r'_2 \cos \theta) \operatorname{tg} \gamma$$

et

$$EH = r'_2 \sin \theta.$$

L'équation :

$$r'_2 \sin \theta = (r_1 + r'_2 - r'_2 \cos \theta) \operatorname{tg} \gamma$$

permet de calculer  $\gamma$ , puisque :

$$\theta = \frac{r_1}{r'_2} \alpha = \frac{r_1}{r'_2} (\gamma + \delta).$$

En définitive, nous avons l'équation :

$$\sin \frac{r_1}{r'_2} (\gamma + \delta) = \left[ \frac{r_1}{r'_2} + 1 - \cos \frac{r_1}{r'_2} (\gamma + \delta) \right] \operatorname{tg} \gamma. \quad (50)$$

Nous savons que :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2};$$

puisque  $r'_2 = \frac{r_2}{2}$ , nous aurons :

$$\frac{r_1}{r'_2} = \frac{2z_1}{z_2}.$$

L'équation (50) devient :

$$\sin \frac{2z_1}{z_2} (\gamma + \delta) = \left[ \frac{2z_1}{z_2} + 1 - \cos \frac{2z_1}{z_2} (\gamma + \delta) \right] \operatorname{tg} \gamma.$$

Définissons le rapport d'engrenage  $K$  :

$$K = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}, \quad \frac{2z_1}{z_2} = 2K.$$

L'équation (50) prend la forme :

$$\sin 2K (\gamma + \delta) = [2K + 1 - \cos 2K (\gamma + \delta)] \operatorname{tg} \gamma. \quad (51)$$

L'équation (51) permet de calculer  $\gamma$ , puis, au moyen de l'équation (49), le rayon  $R_1$ .

L'équation (51) ne peut être résolue que par approximations successives, c'est-à-dire par des calculs un peu longs dont nous allons donner un exemple.

**Calcul numérique de l'angle  $\gamma$ .** — Soient une roue de 60 dents et un pignon de 6 dents (ou ailes) :

$$K = \frac{r_1}{r_2} = 10, \quad \frac{r_1}{r'_2} = 20 = 2K,$$

$$\delta = \frac{\pi}{2 \cdot 60} = \frac{180}{120} = 1^\circ 30'.$$

L'équation (51) devient :

$$\sin 20 (\gamma + 1^\circ 30') - [21 - \cos 20 (\gamma + 1^\circ 30')] \operatorname{tg} \gamma = 0. \quad (52)$$

Pour simplifier les notations, nous écrivons cette équation :

$$f(\gamma) = 0.$$

Admettons que  $\gamma = 2^\circ 30'$ . Cette valeur nous est suggérée par un dessin à grande échelle. Or :

$$\gamma + 1^\circ 30' = 4^\circ.$$

L'équation (52) devient :

$$\sin 80^\circ - (21 - \cos 80^\circ) \operatorname{tg} 2^\circ 30' = 0.$$



La valeur  $\gamma = 2^\circ 30'$  est exacte si cette équation est satisfaite. Pour la première approximation, nous pouvons utiliser les tables des valeurs des fonctions trigonométriques à 4 décimales ; nous trouvons dans ces tables :

$$\sin 80^\circ = 0,9848, \quad \cos 80^\circ = 0,1736.$$

Tous calculs faits, nous obtenons :

$$f(2^\circ 30') = 0,0755.$$

Supposons maintenant :

$$\gamma = 3^\circ, \quad \gamma + \delta = 4^\circ 30', \quad 20(\gamma + \delta) = 90^\circ.$$

Le calcul donne :

$$f(3^\circ) = -0,1004.$$

Lorsque  $\gamma$  passe de  $2^\circ 30'$  à  $3^\circ$ , la fonction  $f(\gamma)$  change de signe. Si nous admettons que  $f(\gamma)$  évolue de façon continue, nous pouvons affirmer qu'il y a, entre  $2^\circ 30'$  et  $3^\circ$ , une valeur de  $\gamma$  pour laquelle  $f(\gamma) = 0$ .

Pour ne pas trop tâtonner dans la recherche de cette nouvelle valeur, nous supposons que  $f(\gamma)$  peut être considéré comme une fonction

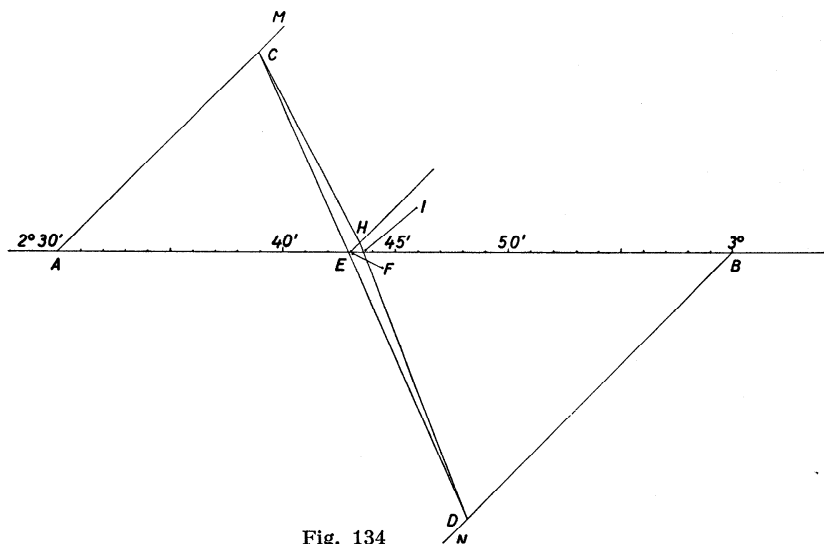


Fig. 134

linéaire de  $\gamma$  entre les valeurs de  $2^\circ 30'$  et  $3^\circ$  ; nous savons que cette supposition n'est pas exacte, mais, en la faisant, nous ne commettons pas une erreur grossière.

Portons sur une droite, à partir d'un point quelconque  $O$ , les grandeurs  $OA$  et  $OB$  proportionnelles à  $2^\circ 30'$  et à  $3^\circ$  (fig. 134) : il suffit de dire que  $AB$  représente la valeur de  $30'$  et le point  $O$  n'a pas besoin d'être dessiné.

Nous choisissons  $AB$  de façon qu'il soit un multiple entier de 30 : par exemple,  $AB = 90$  mm comme nous l'avons dessiné. Traçons deux parallèles  $AM$  et  $BN$  sur lesquelles nous portons des segments  $AC$  et  $BD$  proportionnels à 0,0755 et à  $-0,1004$ . Prenons :

$$AC = 0,0755 a, \quad BD = 0,1004 a,$$

avec  $a = 500$  mm, d'où :

$$AC = 37,75 \text{ mm}, \quad BD = 50,20 \text{ mm}.$$

$AC$  et  $BD$  ne sont pas du même côté de la droite  $AB$ , puisqu'ils représentent des valeurs de signes contraires.

Le point  $E$ , intersection de  $AB$  et de  $CD$ , détermine une valeur de  $\gamma$  qui annulerait la fonction  $f(\gamma)$  si cette fonction était linéaire. D'après le dessin,  $E$  correspond à  $2^\circ 42', 8$ .

Nous aurions aussi pu calculer cette valeur au moyen de la relation :

$$\frac{x}{30 - x} = \frac{0,0755}{0,1004},$$

en désignant par  $x$  la valeur, exprimée en minutes d'angle, représentée par  $AE$  dans la figure, c'est-à-dire l'excédent de  $\gamma$  sur  $2^\circ 30'$ . Or,  $x = 12', 8$ . Donc :

$$\gamma = 2^\circ 30' + x = 2^\circ 42', 8.$$

Cette valeur de  $\gamma$  est plus approchée que  $2^\circ 30'$  et  $3^\circ$ . En calculant  $f(\gamma)$  pour la valeur  $\gamma = 2^\circ 43'$ , on obtient :

$$f(2^\circ 43') = 0,0033.$$

Du point  $F$  (fig. 134), menons  $FH$  parallèle à  $AM$  et tel que :

$$FH = 0,0033 a = 0,0033 \cdot 500 = 1,65 \text{ mm}.$$

La courbe reliant les points  $C$ ,  $H$  et  $D$  représente mieux la fonction  $f(\gamma)$  que la droite  $CD$ . Le point d'intersection  $I$  de cette courbe avec  $AB$  donne une solution encore plus approchée que  $E$ .

Prenons maintenant  $\gamma = 2^\circ 43' 30''$  ; nous trouvons :

$$f(2^\circ 43' 30'') = 0,00044.$$

Portons (fig. 135) sur une droite un segment  $AB$  qui représente  $30''$  ; nous dirons que le point  $A$  représente la valeur  $\gamma = 2^\circ 43'$  et le point  $B$  la valeur  $\gamma = 2^\circ 43' 30''$ . Dessinons deux parallèles  $AC$  et  $BD$  et faisons :

$$AC = 0,0033 a = 0,0033 \cdot 20\,000 = 66 \text{ mm},$$

$$BD = 0,00044 a = 8,8 \text{ mm}.$$

$AC$  et  $BD$  sont ici du même côté de  $AB$ , puisque ces deux segments représentent des valeurs positives. Nous trouvons, en traçant  $CD$ , un point  $E$  correspondant à  $\gamma = 2^\circ 43' 34''$ , 6. Le calcul donne :

$$f(2^\circ 43' 34'') = 0,000\ 052.$$

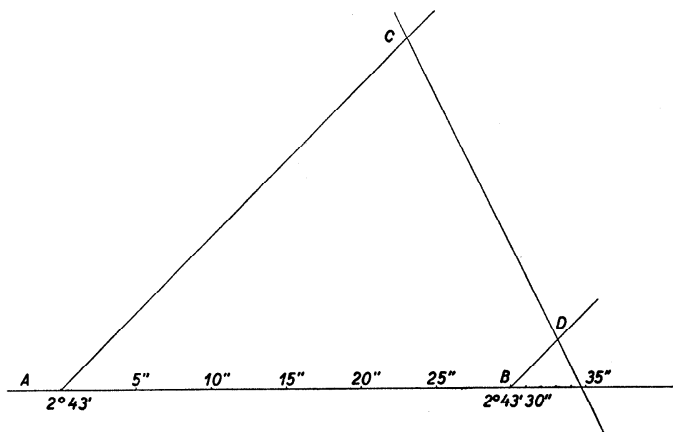


Fig. 135

Si nous ne voulons pas tenir compte des fractions de seconde, nous pouvons dire que la solution de l'équation (51) est entre :

$$\gamma = 2^\circ 43' 34'' \quad \text{et} \quad \gamma = 2^\circ 43' 35'',$$

car pour cette dernière valeur, nous obtenons :

$$f(2^\circ 43' 35'') = -0,000\ 044\ 8.$$

La vraie valeur de  $\gamma$  est  $2^\circ 43' 34''$ , 5.

Le calcul de l'angle  $\gamma$  est assez long, mais, comme l'équation (51) ne contient que le rapport d'engrenage  $K$  et l'angle  $\delta$  qui dépend de  $z_1$ , la solution trouvée est valable pour tous les engrenages des roues de 60 et 6 dents, quel que soit leur module.

**Méthode de Schouffelberger pour calculer le rayon total de la roue.** — Dans la figure 133, on a :

$$\text{arc } AE = \text{arc } AF, \quad r'_2 \theta = r_1 \alpha = r_1 (\gamma + \delta),$$

d'où :

$$\theta = \frac{r_1}{r'_2} (\gamma + \delta). \quad (53)$$

Le triangle  $O_1EO'_2$  donne :

$$\frac{r_1 + r'_2}{r'_2} = \frac{\sin(180^\circ - \gamma - \theta)}{\sin \gamma} = \frac{\sin(\gamma + \theta)}{\sin \gamma}. \quad (54)$$

Les équations (53) et (54) contiennent les quantités connues  $r_1$ ,  $r'_2$  et  $\delta$ , et les inconnues  $\gamma$  et  $\theta$ . Il faut résoudre ces équations par approximation, puis appliquer la formule (49) pour calculer le rayon total  $R_1$  de la roue.

**L'angle de conduite.** — Reprenons la figure 133 dans laquelle la roue conduit le pignon. Quand le contact était sur la ligne des centres, le point  $B$  était en  $A$  ainsi que le point  $C$ . Comme  $E$  est le dernier point de contact, la roue a conduit le pignon après la ligne des centres pendant l'angle  $\alpha$ , tandis que le pignon a tourné de l'angle  $\frac{\theta}{2}$ .

Ces deux angles peuvent être facilement calculés à partir de  $\gamma$ . En effet :

$$\alpha = \gamma + \delta, \quad \theta = \frac{r_1}{r'_2} \alpha.$$

Dans le cas de l'engrenage 60/6, nous avons trouvé :

$$\gamma = 2^\circ 43' 34'', 5.$$

Or  $\delta = 1^\circ 30'$ . Donc :

$$\alpha = 4^\circ 13' 34'', 5, \quad \theta = 20\alpha = 84^\circ 31' 30''.$$

La roue de 60 dents fait tourner le pignon de l'angle  $\frac{\theta}{2}$ , c'est-à-dire de  $42^\circ 15' 45''$ .

Nous pourrions calculer de la même façon l'angle de conduite avant la ligne des centres. L'angle de  $42^\circ 15' 45''$  serait l'angle de conduite avant la ligne des centres si le pignon conduisait la roue.

Pour des raisons que nous exposerons plus loin, les horlogers préfèrent la conduite après la ligne des centres. Mais il n'est pas toujours possible d'éviter les contacts avant la ligne des centres, car la conduite après cette ligne n'est pas toujours suffisante parce qu'elle est inférieure au pas angulaire du pignon. Il faut donc parfois tolérer des contacts avant la ligne des centres, c'est-à-dire entre le flanc interne de la dent et la saillie de l'aile. Lorsque la conduite après la ligne des centres est suffisante, c'est-à-dire qu'elle est au moins égale au pas angulaire du pignon, il est possible de supprimer sans inconvénient la saillie des dents du pignon. Il n'est donc pas inutile de calculer une fois pour toutes les angles de conduite du pignon par la roue, pour les engrenages les plus usités en

horlogerie. Ce calcul montre dans quels cas la forme de la saillie de l'aile est indifférente ; il révélera aussi pourquoi il est important, dans certains cas, de conserver une partie du profil théorique.

Ces calculs ont été faits par J. et H. Grossmann et par H. Schouffelberger ; nous donnons la table de Schouffelberger qui est plus complète que celle des Grossmann.

**Table de Schouffelberger pour les angles de conduite du pignon dans les engrenages d'horlogerie.** — Dans cette table, l'angle  $\frac{\theta}{2}$  de conduite après la ligne des centres a été calculé. L'angle  $\beta$  de conduite avant la ligne des centres est la différence entre le pas angulaire  $p_a$  et l'angle  $\frac{\theta}{2}$ . Lorsque  $\frac{\theta}{2} > p_a$ , l'angle  $\beta$  est négatif et sa valeur n'est pas indiquée ; dans ce cas, la saillie de l'aile ne joue aucun rôle.

| Nombre de dents |                 | Pas angulaire<br>du pignon<br>$p_a$ | Angle de conduite                                   |  |
|-----------------|-----------------|-------------------------------------|---|--|
| roue<br>$z_1$   | pignon<br>$z_2$ |                                     | après la ligne<br>des centres<br>$\frac{\theta}{2}$ | avant la ligne<br>des centres<br>$\beta$ |
| 120             | 12              | 30°                                 | 32° 50' 43"   |  |
| 96              | 12              | 30°                                 | 32° 33' 14"   |  |
| 84              | 12              | 30°                                 | 32° 21' 3"  |  |
| 60              | 12              | 30°                                 | 31° 43' 35"   |  |
| 90              | 10              | 36°                                 | 34° 55' 43"   | 1° 4' 17"                                |
| 80              | 10              | 36°                                 | 34° 45' 47"   | 1° 14' 13"                               |
| 75              | 10              | 36°                                 | 34° 39' 54"   | 1° 20' 6"                                |
| 70              | 10              | 36°                                 | 34° 33' 14"   | 1° 26' 46"                               |
| 60              | 10              | 36°                                 | 34° 16' 51"   | 1° 43' 9"                                |
| 80              | 8               | 45°                                 | 38° 0' 55"  | 6° 59' 5"                                |
| 64              | 8               | 45°                                 | 37° 42' 24"   | 7° 17' 36"                               |
| 56              | 8               | 45°                                 | 37° 29' 28"   | 7° 30' 32"                               |
| 70              | 7               | 51° 25' 43"                         | 39° 55' 14"   | 11° 30' 29"                              |
| 63              | 7               | 51° 25' 43"                         | 39° 46' 50"   | 11° 38' 53"                              |
| 60              | 6               | 60°                                 | 42° 15' 45"   | 17° 44' 15"                              |
| 54              | 6               | 60°                                 | 42° 7' 18"  | 17° 52' 42"                              |
| 48              | 6               | 60°                                 | 41° 56' 51"   | 18° 3' 9"                                |

**Autre forme de l'équation pour le rayon total.** — Rappelons l'équation (49) :

$$R_1 = r'_2 \frac{\sin \frac{r_1}{r'_2} (\gamma + \delta)}{\sin \gamma}.$$

Exprimons les longueurs en fonction du module  $m$  :

$$r_1 = \frac{mz_1}{2}, \quad r_2 = \frac{mz_2}{2}, \quad r'_2 = \frac{mz_2}{4}.$$

Comme  $\frac{r_1}{r'_2} = \frac{2z_1}{z_2}$ , nous aurons :

$$R_1 = \frac{mz_2}{4} \frac{\sin \frac{2z_1}{z_2} (\gamma + \delta)}{\sin \gamma}. \quad (55)$$

Lorsque la dent de la roue occupe la moitié du pas, comme c'est le cas pour les roues du rouage, nous avons :

$$\delta = \frac{\pi}{2z_1} = \frac{90^\circ}{z_1}.$$

La formule pour  $R_1$  devient :

$$R_1 = \frac{mz_2}{4} \frac{\sin \frac{2z_1}{z_2} \left( \gamma + \frac{90^\circ}{z_1} \right)}{\sin \gamma}.$$

En appliquant cette dernière formule à l'engrenage 60/6, dont nous avons calculé l'angle  $\gamma$ , nous aurons :

$$R_1 = m \frac{6}{4} \frac{\sin (20^\circ 4' 13'' 34'', 5)}{\sin 2^\circ 43' 34'', 5} = 31,389 m.$$

Puisque  $r_1 = 30 m$ , la hauteur de la saillie est 1,389  $m$ .

**Tables pour les diamètres totaux des roues.** — Dans la pratique, il est très important de connaître la valeur des rayons totaux des roues et des pignons : ce sont les seuls qu'on peut mesurer. Mais l'emploi des formules (49) ou (55) conduit à des calculs fastidieux. Ces calculs ont été faits et ils sont condensés dans des tables construites d'après deux principes différents.

J. et H. Grossmann utilisent un *facteur de proportionnalité*  $K$  défini par :

$$K = \frac{R}{r} = \frac{D}{d},$$

d'où :

$$D = Kd. \quad (56)$$

Si l'on a affaire à plusieurs roues, on distinguera les différents facteurs de proportionnalité par des indices :  $K_1$  désignera le facteur pour la roue de  $z_1$  dents,  $K_2$  celui de la roue de  $z_2$  dents, etc.

Pour la roue de 60 dents engrenant avec un pignon de 6 dents, on a :

$$K_1 = 1,0464,$$

d'où :

$$R_1 = 1,0464 r_1, \quad D_1 = 1,0464 d_1.$$

Un autre procédé, souvent employé aujourd'hui, consiste à exprimer le diamètre total de la roue en fonction du module, du nombre des dents de la roue et d'un facteur  $f$  qui dépend du nombre des dents du pignon. La formule est :

$$D = m(z + f). \quad (57)$$

En écrivant  $D = mz + mf = d + mf$ , on voit que  $mf$  représente le double de la hauteur de la saillie des dents.

Dans la table de R. Berthoud (*Dictionnaire des engrenages épicycloïdaux*), on trouve pour l'engrenage 60/6 :

$$f = 2,77,$$

d'où :

$$D_1 = 62,77 m.$$

Comparons avec le résultat obtenu au moyen du facteur de proportionnalité des Grossmann :

$$K_1 = 1,0464;$$

nous avons :

$$D_1 = 1,0464 d_1 = 1,0464 \cdot 60 m = 62,784 m.$$

La différence entre les valeurs obtenues d'après les deux méthodes est  $0,014 m$  ; cette quantité est négligeable puisque les roues d'horlogerie ont rarement un module plus grand que  $0,25 \text{ mm}$  ; elle est, dans ce cas extrême, une fraction de centimillimètre, exactement :

$$0,0025 \text{ mm} = 0,25 \text{ cmm}.$$

Nous pouvons facilement trouver une relation entre  $K$  et  $f$ . En effet :

$$D = K d = m (z + f)$$

et

$$K d = K m z,$$

donc :

$$K m z = m (z + f),$$

d'où nous tirons :

$$K = 1 + \frac{f}{z}$$

et

$$f = z (K - 1). \quad (58)$$

**Forme des dents des pignons.** — La forme épicycloïdale des dents des pignons donnerait, dans la plupart des cas intéressants, un angle de conduite avant la ligne des centres plus grand que cela n'est nécessaire. On pourrait aussi obtenir deux contacts simultanés. Pour transmettre des forces considérables, il y a parfois intérêt à répartir la pression sur plusieurs dents, mais, en horlogerie, il n'en est pas ainsi et les contacts simultanés, qui ne sont pas nuisibles s'ils sont corrects, peuvent le devenir à cause des profils défectueux, des jeux ou des dimensions inexactes des mobiles ; on les évite donc autant que possible. D'autre part les profils épicycloïdaux sont difficiles à réaliser ; dans la

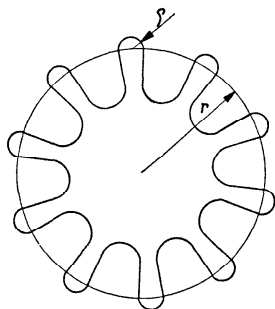


Fig. 136

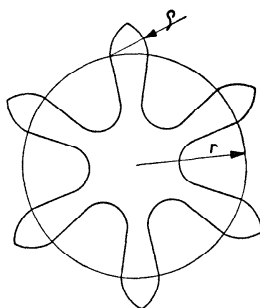


Fig. 137

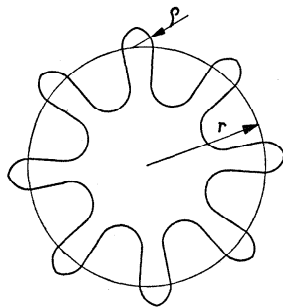


Fig. 138

fabrication, ils sont remplacés par des profils circulaires qui se confondent avec l'arc d'épicycloïde sur une longueur qui doit être d'autant plus grande que le pignon a moins de dents.

Pour les pignons très « nombrés », c'est-à-dire qui ont un nombre de dents supérieur à 10, on termine les dents par une demi-circonférence (fig. 136).



Aux autres pignons on donne généralement l'une des formes décrites ci-dessous. Pour les pignons de 6 et 7 ailes, on forme la saillie au moyen de deux arcs de circonférence de rayon égal à la largeur  $l$  de l'aile (fig. 137) ; les centres de ces arcs sont sur la circonférence primitive. Cette forme a été normalisée (feuille NHS, 56 703) et porte le nom d'*ogive normalisée*. Une autre forme, également normalisée, est appliquée aux pignons de 8, 9 ou 10 ailes ; elle est constituée par deux arcs de circonférence dont les rayons sont égaux à  $2/3 l$  et dont les centres se trouvent sur la circonférence primitive ; c'est l'*ogive réduite normalisée* (fig. 138).

La largeur  $l$  de la dent du pignon dépend du module, du nombre des dents et du jeu ; elle est une fonction du pas. On posera :

$$l = ap,$$

où  $a$  désigne une constante dépendant du jeu et de sa répartition. Puisque :

$$p = m\pi,$$

$$l = a\pi m = cm,$$

où  $c = a\pi$ .

Si l'on suppose le jeu égal à  $\frac{1}{6}p$  et pris uniquement sur le pignon, on obtient :

$$l = p - \frac{p}{2} - \frac{p}{6} = \frac{p}{3}, \quad a = \frac{1}{3}, \quad c = \frac{\pi}{3} = 1,0472.$$

Il est dès lors facile d'établir le tableau suivant :

| Jeu            | $l$                                   | $a$             | $c$      | Observations                                |
|----------------|---------------------------------------|-----------------|----------|---|
| $\frac{p}{6}$  | $\frac{p}{3} = \frac{\pi m}{3}$       | $\frac{1}{3}$   | 1,047 2  | Pour les pignons dont $z \leq 10$           |
| $\frac{p}{10}$ | $\frac{2p}{5} = \frac{2\pi m}{5}$     | $\frac{2}{5}$   | 1,256 6  | Pour les pignons dont $z > 10$              |
| $\frac{p}{15}$ | $\frac{7p}{15} = \frac{7\pi m}{15}$   | $\frac{7}{15}$  | 1,466 08 | Pour les engrenages de renvois et minuterie |
| $\frac{p}{20}$ | $\frac{19p}{40} = \frac{19\pi m}{40}$ | $\frac{19}{40}$ | 1,492 26 | Pour les engrenages de remontoir            |
|                |                                       |                 |          | Jeu également réparti sur les deux mobiles  |

**Calcul des diamètres totaux des pignons à denture demi-circulaire.** — Soit (fig. 136) un pignon de  $z$  dents et de module  $m$  ; on a :

$$d = mz.$$

Or :

$$D = d + l, \quad D = mz + 1,2566 m, \quad D = m(z + 1,2566), \quad (59)$$

puisque la forme demi-circulaire est appliquée aux pignons pour lesquels le jeu est égal à  $\frac{p}{10}$ .

Si, pour une raison quelconque, on donnait cette forme aux ailes des

pignons pour lesquels  $j = \frac{p}{6}$ , la formule (59) deviendrait :

$$D = m(z + 1,0472). \quad (60)$$

Ces deux formules sont approximatives parce que le rayon  $\rho$  de la circonférence terminant la dent du pignon a été supposé égal à la moitié de la largeur de la dent ; or, cette largeur est la longueur de l'arc intercepté sur la circonférence primitive par la dent du pignon.

On voit (fig. 139) que, si  $j = \frac{p}{6}$  :

$$\rho = 2r \sin \frac{\alpha}{2} = 2r \sin \frac{30^\circ}{z}.$$

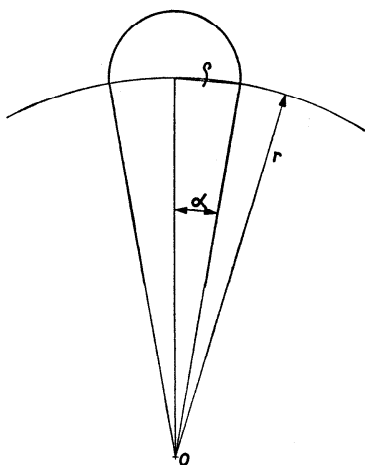


Fig. 139

Pour  $j = \frac{p}{6} = 0,523 m$ , la formule (60) devient :

$$D = d + 2\rho = mz + 2mz \sin \frac{30^\circ}{z} = mz \left( 1 + 2 \sin \frac{30^\circ}{z} \right). \quad (61)$$

Pour  $j = \frac{p}{10} = 0,314 m$ , la formule (59) devient :

$$D = mz \left( 1 + 2 \sin \frac{36^\circ}{z} \right). \quad (62)$$

Si l'on évalue, par exemple, le facteur  $b = 2 \sin \frac{30^\circ}{z}$  pour les pignons de 6 à 8 ailes, on obtient, pour  $z = 6$  :

$$b = 0,174 4, \quad D = m(z + 1,0464);$$

pour  $z = 7$  :

$$b = 0,149 46, \quad D = m(z + 1,0462);$$

pour  $z = 8$  :

$$b = 0,130 8, \quad D = m(z + 1,0464).$$

Dans la pratique, on n'utilise le profil demi-circulaire que pour les pignons de 10 dents ou plus.

Pour les pignons de 6 à 8 ailes, on peut donc utiliser le facteur 1,046 qui est le facteur  $j$  du *Dictionnaire des engrenages épicycloïdaux* de R. Berthoud. Pour les pignons de 6 à 8 ailes à saillies demi-circulaires et pour  $j = \frac{P}{6}$ , on peut utiliser la formule :

$$D = m (z + 1,046). \quad (63)$$

Si l'on calcule le facteur  $b = 2 \sin \frac{36^\circ}{z}$  pour les pignons de 10 et 12 ailes, on trouve, pour  $z = 10$  :

$$b = 0,125\ 58, \quad D = m (z + 1,2558);$$

pour  $z = 12$  :

$$b = 0,104\ 6, \quad D = m (z + 1,2552).$$

D'où la formule de Berthoud pour les pignons de 10 ailes et plus, à saillies demi-circulaires, quand  $j = \frac{P}{10}$  :

$$D = m (z + 1,256). \quad (64)$$

Ces formules de Berthoud, bien qu'approximatives, sont suffisantes pour les calculs des engrenages normaux d'horlogerie. Cependant, pour calculer le diamètre total d'un pignon avec un nombre inusité de dents, il vaut mieux reprendre la formule exacte. Ainsi pour  $z = 24$ , on a :

$$2 \sin \frac{36^\circ}{24} = 0,052\ 256,$$

d'où :

$$D = m (z + 1,2541).$$

Les différences entre les formules ci-dessus sont minimales et les résultats, en pratique, sensiblement équivalents. Aussi la normalisation horlogère suisse recommande-t-elle deux formules plus simples ; pour  $j = \frac{P}{6}$  :

$$D = m (z + 1,05), \quad (65)$$

pour  $j = \frac{P}{10}$  :

$$D = m (z + 1,25). \quad (66)$$

Lorsqu'on calcule le diamètre total d'un pignon de 6 ailes ( $j = \frac{P}{6}$ ) d'après les différentes formules et pour  $m = 0,10$  mm, on trouve, d'après la formule (60) :

$$D = 0,704\ 72\ \text{mm},$$

d'après la formule (63) :

$$D = 0,7046 \text{ mm},$$

d'après la formule (65) :

$$D = 0,705 \text{ mm}.$$

La plus grande différence entre ces valeurs est 0,4 micron. Si le module était 3 fois plus grand, la plus grande différence entre les valeurs de  $D$  serait 1,2 micron.

Ces différences ne jouent aucun rôle dans la pratique ; elles ne représentent que 0,06 % de la valeur exacte du diamètre. La formule (65) est donc suffisante pour le technicien.

Un autre exemple montrerait qu'il en est de même de la formule (66) ; pour  $m = 0,10 \text{ mm}$  et  $z = 10$ , la plus grande différence serait 0,6 micron, ce qui représente également 0,06 % de la valeur exacte.

Mais on peut aussi calculer le diamètre total d'un pignon d'après la formule des Grossmann :

$$D = K d.$$

Les valeurs du facteur de proportionnalité  $K$  sont :

| Nombre de<br>dents<br>$z$ | Jeu<br>$j$     | Facteur de<br>proportionnalité<br>$K$ |
|---------------------------|----------------|---------------------------------------|
| 6                         | $\frac{p}{6}$  | 1,175                                 |
| 8                         | $\frac{p}{6}$  | 1,13                                  |
| 10                        | $\frac{p}{6}$  | 1,105                                 |
| 12                        | $\frac{p}{10}$ | 1,104                                 |

Dans l'exemple traité ci-dessus, avec  $m = 0,10 \text{ mm}$  et  $z = 6$ , on a :

$$d = 0,6 \text{ mm}, \quad D = 0,705 \text{ mm},$$

c'est-à-dire la valeur trouvée au moyen de la formule (65).

**Les diamètres totaux des pignons à saillies ogivales.** — Pour retrouver les formules se rapportant aux formes normalisées (feuille NHS, 56 703), on procède de la façon suivante :

Dans le profil appelé *ogive réduite normalisée* (fig. 140), le rayon  $\rho$  est la corde qui sous-tend l'arc de circonférence égale à  $2/3 l$ ; les centres des circonférences sont  $B$  et  $C$ . Dans le triangle  $BSC$ , on a :

$$BC = 2EC = 2r \sin \frac{\alpha}{2},$$

$$CS = \rho = 2r \sin \alpha,$$

$$\begin{aligned} ES &= \sqrt{CS^2 - EC^2} \\ &= r \sqrt{4 \sin^2 \alpha - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}. \end{aligned}$$

Comme  $OE = r \cos \frac{\alpha}{2}$ , on aura donc :

$$\begin{aligned} D &= 2(OE + ES) \\ &= 2r \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt{4 \sin^2 \alpha - \sin^2 \frac{\alpha}{2}} \right), \end{aligned}$$

soit :

$$D = 2r \left( \cos \frac{\alpha}{2} + \sqrt{16 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1} \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \right).$$

Si  $j = \frac{p}{6}$  et  $l = \frac{p}{3}$ , on obtient  $\alpha = \frac{40^\circ}{z}$  et

$$D = mz \left( \cos \frac{20^\circ}{z} + \sqrt{16 \cos^2 \frac{20^\circ}{z} - 1} \cdot \sin \frac{20^\circ}{z} \right).$$

Pour  $j = \frac{p}{10}$ ,  $l = \frac{2p}{5}$ , on a  $\alpha = \frac{48^\circ}{z}$  et

$$D = mz \left( \cos \frac{24^\circ}{z} + \sqrt{16 \cos^2 \frac{24^\circ}{z} - 1} \cdot \sin \frac{24^\circ}{z} \right).$$

Si l'on effectue le calcul pour  $z = 6$ , on trouve  $D = 1,2229 mz$ . Ainsi le facteur de proportionnalité  $K$  est 1,2229. Mais d'après la relation (58) :

$$f = z(K - 1),$$

soit ici :

$$f = 6 \cdot 0,2229 = 1,3374 \cong 1,34.$$

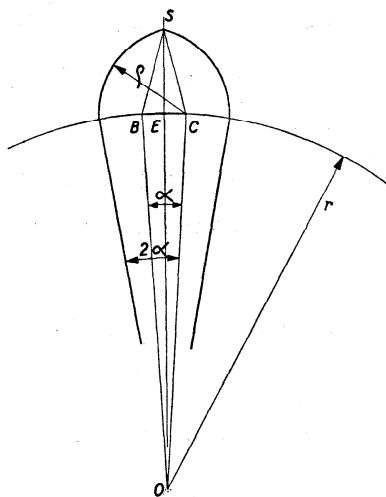


Fig. 140



Pour  $z = 6$ ,  $j = \frac{p}{6}$ , on a :

$$D = 1,2856 \, m z$$

ou, en calculant le facteur  $f$  d'après  $K = 1,2856$  :

$$D = m z + 1,71 \, m.$$

Pour les pignons à ogives normalisées, on trouve, pour  $z \leq 10$  et  $j = \frac{p}{6}$  :

$$D = m (z + 1,71), \quad (69)$$

pour  $z > 10$  et  $j = \frac{p}{10}$  :

$$D = m (z + 2,10). \quad (70)$$

**Mesure des diamètres totaux des roues et des pignons.** — Dans la fabrication et dans la réparation, on est appelé à mesurer le diamètre total d'une roue ou d'un pignon pour voir si ce diamètre a la grandeur prescrite.

On utilise pour cela le micromètre : l'une des butées est appuyée sur le sommet d'une dent, tandis que l'autre est appuyée sur le sommet de la dent opposée (fig. 142).

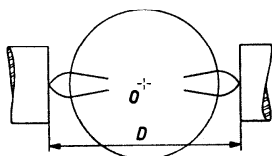


Fig. 142

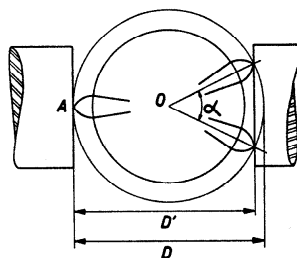


Fig. 143

Mais si la roue ou le pignon ont un nombre impair de dents, il n'y a pas deux dents diamétralement opposées ; si l'une des butées du micromètre s'appuie sur le sommet d'une dent, l'autre repose sur les deux dents les plus rapprochées du rayon opposé à celui qui aboutit en A (fig. 143). Il est évident que, de cette façon, on ne mesure pas le diamètre  $D$ , mais une grandeur  $D'$  plus petite que  $D$ .

On voit facilement que :

$$D' = R + R \cos \frac{\alpha}{2} = R \left( 1 + \cos \frac{180^\circ}{z} \right) = R \left( 1 + \cos \frac{\pi}{z} \right).$$

On peut écrire :

$$D' = D \frac{1 + \cos \frac{\pi}{z}}{2}$$

ou

$$D = D' \frac{2}{1 + \cos \frac{\pi}{z}}. \quad (71)$$

| $z$ | $\frac{2}{1 + \cos \frac{\pi}{z}}$ | $\frac{1 + \cos \frac{\pi}{z}}{2}$ |
|-----|------------------------------------|------------------------------------|
| 7   | 1,052                              | 0,950                              |
| 9   | 1,031                              | 0,970                              |
| 11  | 1,021                              | 0,980                              |

Ces résultats supposent que l'une des butées s'appuie sur les sommets de deux dents. Cette hypothèse n'est exacte que pour les profils ogivaux ; pour les profils demi-circulaires, l'appui de la butée se fait comme il est indiqué dans la figure 144.

Soient  $\alpha$  le pas angulaire :

$$\alpha = \frac{360^\circ}{z} = \frac{2\pi}{z},$$

et  $\beta$  l'angle occupé par la dent. On a :

$$D' = AO + OB + BC = \varrho + r + r \cos \frac{\alpha}{2} + \varrho = r + 2\varrho + r \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Mais :

$$\varrho = 2r \sin \frac{\beta}{4},$$

$$r + 2\varrho = r \left( 1 + 4 \sin \frac{\beta}{4} \right),$$

et, par conséquent :

$$D' = r \left( 1 + 4 \sin \frac{\beta}{4} + \cos \frac{\alpha}{2} \right).$$

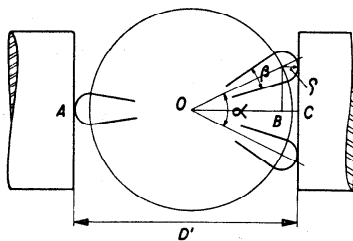


Fig. 144



Si l'on introduit  $D$  dans cette formule, on obtient :

$$D = 2(r + \varrho) = 2r \left( 1 + 2 \sin \frac{\beta}{4} \right),$$

d'où :

$$r = \frac{D}{2 \left( 1 + 2 \sin \frac{\beta}{4} \right)}$$

et, par suite :

$$D' = D \frac{1 + 4 \sin \frac{\beta}{4} + \cos \frac{\alpha}{2}}{2 \left( 1 + 2 \sin \frac{\beta}{4} \right)}$$

ou

$$D = D' \frac{2 \left( 1 + 2 \sin \frac{\beta}{4} \right)}{1 + 4 \sin \frac{\beta}{4} + \cos \frac{\alpha}{2}}. \quad (72)$$

Voici, pour quelques pignons dont le nombre d'ailes est impair, les relations entre  $D$  et  $D'$  :

|                   |           |              |        |
|-------------------|-----------|--------------|--------|
| pour un pignon de | 7 dents : | $D = 1,045$  | $D'$ , |
| »                 | » 9 » :   | $D = 1,028$  | $D'$ , |
| »                 | » 11 » :  | $D = 1,013$  | $D'$ , |
| »                 | » 15 » :  | $D = 1,008$  | $D'$ , |
| »                 | » 31 » :  | $D = 1,0024$ | $D'$ . |

La différence entre  $D$  et  $D'$  diminue au fur et à mesure que  $\alpha$  diminue ou que  $z$  augmente. Pour un pignon de 15 dents, si l'on posait  $D = D'$ , on commettrait une erreur de 8 ‰; pour  $z = 31$ , l'erreur ne serait que 2,4 ‰.

On peut aussi déterminer le diamètre total d'un pignon ou d'une roue en mesurant au micromètre le diamètre du cercle de base  $D_b$ .

Soient :

$t_1$  la hauteur de la saillie de la dent de la roue,  
 $t_2$  la hauteur de la saillie de la dent du pignon,  
 $s'$  la sûreté radiale.

On a (fig. 145) :

$$D = D_b + 2t_1 + 2t_2 + 2s'. \quad (73)$$

Ce mode de faire, qui a l'avantage de ménager les pointes des dents, n'est utilisable que si l'on connaît le module  $m$  et  $t_1, t_2, s'$  en fonction du module, par exemple, et si l'on est certain que les rapports prescrits ont été respectés.

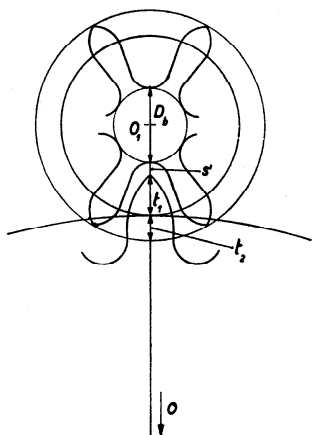


Fig. 145

Si l'on considère un pignon de 6 ailes destiné à travailler avec une roue de 60 dents, on a, d'après les feuilles de normes NHS, 56 702 et 56 703 :

$$2 t_1 = 2,63 m,$$

$$2 t_2 = 1,71 m \text{ (ogive normalisée),}$$

$$s' = 0,40 m.$$

La formule (73) devient :

$$D = D_b + 5,14 m.$$

**Le contrôle de la forme des dents.** — Pour qu'une roue dentée travaille convenablement, il ne suffit pas que les dimensions soient exactes ; il faut aussi que les formes des dents soient

correctes. On vérifie ces formes avec un appareil donnant une image agrandie du profil à contrôler. Ces appareils à projection permettent d'agrandir un certain nombre de fois la forme à vérifier et de faire coïncider l'image obtenue avec un dessin préalablement établi. On voit tout de suite s'il y a des divergences entre l'image et le dessin et si ces divergences sont insignifiantes ou non (pl. VI, fig. 146). Les dessins sont établis sur du papier, sur un film ou sur du verre. Les deux premières matières peuvent être déformées par la chaleur, l'humidité ou une tension. Les dessins sur verre sont donc préférables.

Ces appareils permettent aussi de contrôler les dimensions.

Formes et dimensions peuvent être défectueuses pour plusieurs raisons : les fraises à tailler n'ont pas la forme correcte ou, sur la machine à tailler, elles ont été mal placées par rapport à la roue, enfin le polissage des pignons altère parfois la forme correcte donnée par la fraise.

Les projecteurs de profils peuvent être utilisés pour un examen plus approfondi de l'engrenage ; ils rendent possible le tracé de la ligne d'engrènement, la découverte de contacts défectueux ou d'absence de contact, le contrôle du jeu et de la sûreté radiale.

Cet examen complète celui que l'on fait au moyen du compas aux engrenages et dont la précision repose sur la sensibilité de la main de l'opérateur. Pour ce dernier examen, on place la roue et le pignon entre les broches du compas, puis on rapproche les broches de façon à provoquer l'engrènement. On modifie la distance des axes jusqu'à ce que la roue

entraîne le pignon (auquel on a laissé la roue qui l'accompagne et qui fait office de volant), de façon que le mouvement imprimé à la roue se transmette sans bruit au pignon ; le mouvement doit s'arrêter peu à peu : un arrêt brusque est suspect. Une seconde épreuve consiste à créer une résistance en serrant fortement le pignon entre les broches. La résistance que rencontre la roue conduite avec le doigt doit être continue, régulière, sans à-coup.

**Les tables pour les calculs d'engrenages.** — Les calculs des diamètres totaux des roues et des pignons sont assez compliqués. Pour les éviter, on a publié des tables dans lesquelles les calculs sont déjà effectués. Les tables actuellement utilisées sont basées sur deux systèmes différents : les unes (J. et H. Grossmann : *Horlogerie théorique*, t. I, p. 237 ; E. Jaquet : *Formulaire technique*, 4<sup>e</sup> édition, p. 235) utilisent le facteur de proportionnalité  $K$  défini plus haut :

$$K = \frac{D}{d} ;$$

les autres (R. Berthoud : *Dictionnaire des engrenages* ; E. Jaquet : *Formulaire technique*, 4<sup>e</sup> édition, p. 240 et 243 ; G.-A. Berner : *Notes pratiques pour l'horloger*, p. 36 et 42) expriment les diamètres totaux des roues et des pignons en fonction du module  $m$  d'après la formule :

$$D = m (z + f).$$

Les tables des Grossmann, de Berthoud et les 1<sup>re</sup> et 2<sup>e</sup> tables de Jaquet contiennent les valeurs théoriques des diamètres totaux des roues. Pour les diamètres des pignons, les Grossmann donnent les valeurs pour les saillies demi-circulaires et elliptiques (cette dernière forme est composée de deux arcs d'épicycloïde raccordés par un arc d'ellipse ; elle n'est plus employée) ; Berthoud ne considère que les saillies demi-circulaires, tandis que Jaquet envisage 4 formes de saillies : demi-circulaire, ogive ( $\rho = l$ ), 1/3 ogive ( $\rho = \frac{2}{3}l$ ) et 2/3 ogive ( $\rho = \frac{5}{6}l$ ), les ogives complètes ou réduites étant constituées par deux arcs de circonférence. Mentionnons que le jeu diffère parfois d'un auteur à l'autre ; il est, chez les Grossmann et G.-A. Berner :

$$j = \frac{P}{6} \text{ pour } z \leq 10, \quad j = \frac{P}{10} \text{ pour } z > 10,$$

chez Berthoud :

$$j = \frac{P}{6} \text{ pour } z \leq 8, \quad j = \frac{P}{10} \text{ pour } z > 8,$$

chez Jaquet :

$$j = \frac{P}{6} \text{ pour } z \leq 10, \quad j = \frac{P}{10} \text{ pour } z \geq 10.$$

Enfin, la 3<sup>e</sup> table de Jaquet et celle de G.-A. Berner se rapportent à un profil corrigé, raccourci pour les dents des roues, de sorte que le nouveau facteur  $f_c$  est lié au facteur  $f$  du profil épicycloïdal par la relation :

$$f_c = 0,95 f,$$

parce que la saillie est formée par deux arcs de circonférence ayant pour rayon  $\rho$ , fonction du nombre des dents de la roue et du pignon. En consultant ces différentes tables, le technicien doit tenir compte des particularités de chacune d'elles.

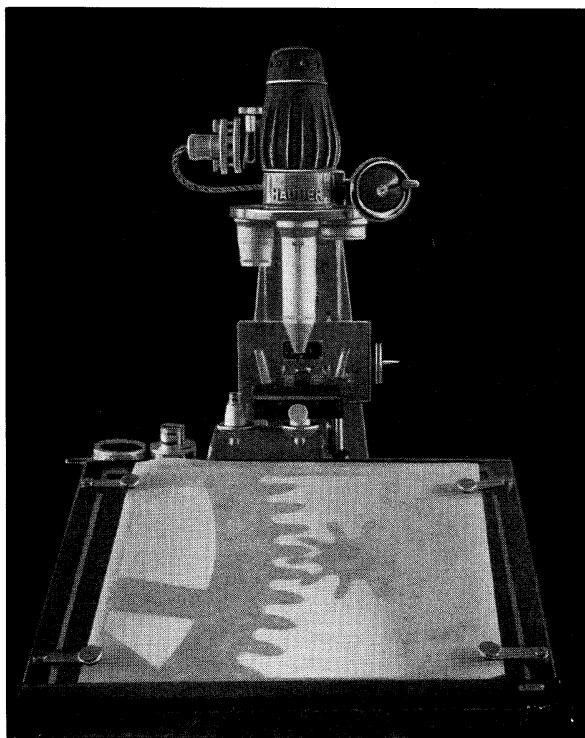
**Insuffisance de la solution théorique.** — Nous avons établi (p. 191) la règle suivante : pour que la transmission de l'énergie d'une roue dentée à une autre roue dentée soit régulière, il faut que la normale commune au point de contact des profils passe toujours par le point de tangence des circonférences primitives des deux roues. Nous avons déduit cette règle des conditions d'équilibre des deux mobiles en ne faisant intervenir que le moment moteur de la roue menante, la pression sur les dents de la roue menée et la résistance du second mobile.

Nous avons simplifié le problème en négligeant des forces qui agissent toujours, que nous en tenions compte ou non : ce sont les forces de frottement et en particulier le frottement des dents les unes contre les autres et celui des pivots dans les coussinets.

Le frottement est une résistance qui s'oppose au mouvement qui le provoque. Admettons que le frottement qui s'oppose au mouvement d'un corps sur un autre soit proportionnel à la pression normale du premier corps sur le second et à un coefficient  $\varphi$  appelé *coefficient de frottement*.

Considérons (fig. 147) deux profils corrects d'après la loi que nous venons d'énoncer ; le point de contact de la saillie de la dent et du flanc de l'aile est, dans un engrenage épicycloïdal, un point  $B$  de la circonférence du cercle générateur de centre  $O_2$ . A l'instant envisagé, la dent glisse contre l'aile ; le point de contact glisse sur l'aile dans le sens  $BH$  et sur la dent dans le sens  $BC$ . Sur la dent de la roue agissent, en  $B$ , la pression de l'aile suivant  $BA$  et le frottement suivant  $BH$ .

Dessignons sur  $BA$  un segment proportionnel à la pression normale  $P$  et sur  $BH$ , dans le même rapport, un segment  $BF$  proportionnel à  $P\varphi$ . La résultante  $R$  de ces deux forces ne passe pas par le point de tangence  $A$  des circonférences primitives. La transmission de l'énergie n'est donc pas régulière.



Pl. VI, fig. 146



Calculons, en tenant compte du frottement, le moment  $M_2$  capable de tenir en équilibre les deux roues dont l'une, de centre  $O_1$ , est sollicitée par une force de moment  $M_1$ .

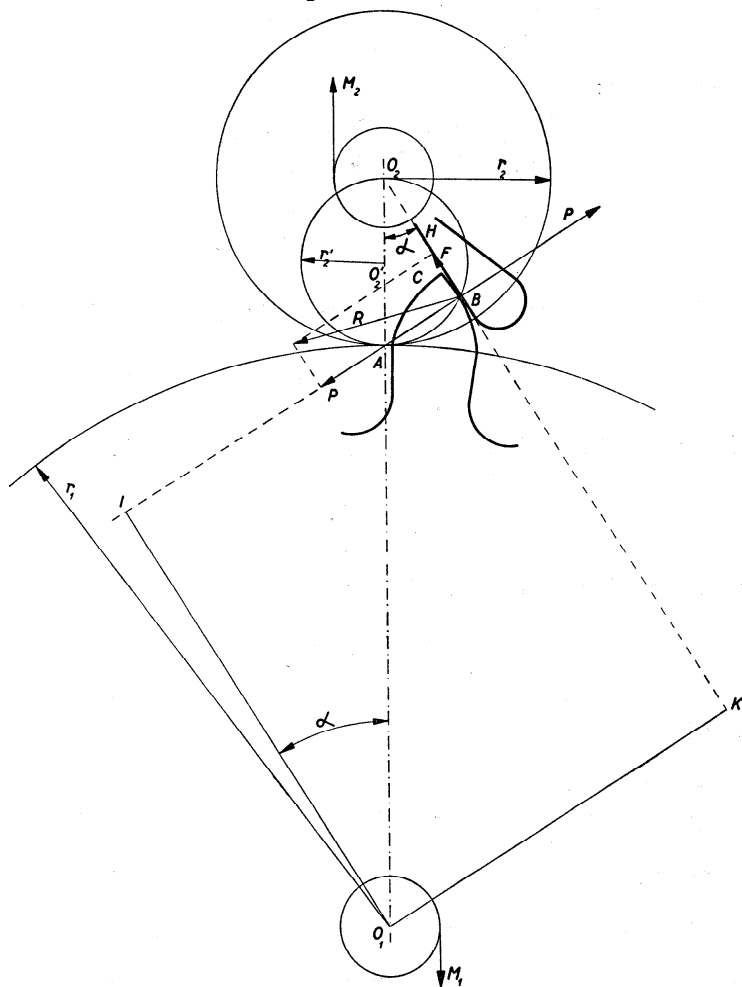


Fig. 147

L'équation d'équilibre de la roue  $O_1$  est :

$$M_1 - P \cdot O_1 I - P \varphi \cdot O_1 K = 0.$$

Le pignon est en équilibre si :

$$M_2 - P \cdot O_2 B = 0.$$

Ici, le frottement n'intervient pas, parce qu'il est dirigé vers  $O_2$ .

Ces équations peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned} M_1 - Pr_1 \cos \alpha - P\varphi (r_1 + r_2) \sin \alpha &= 0, \\ M_2 - Pr_2 \cos \alpha &= 0. \end{aligned}$$

D'où nous tirons :

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{r_1}{r_2} + \varphi \left( \frac{r_1}{r_2} + 1 \right) \operatorname{tg} \alpha$$

ou

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{z_1}{z_2} + \varphi \left( \frac{z_1}{z_2} + 1 \right) \operatorname{tg} \alpha. \quad (74)$$

En négligeant le frottement, nous avons trouvé la relation (36) :

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

Faisons  $\varphi = 0$  dans la formule (74), nous aurons aussi :

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

La perturbation est représentée par le terme

$$\varphi \left( \frac{z_1}{z_2} + 1 \right) \operatorname{tg} \alpha,$$

dont la valeur augmente avec le rapport d'engrenage  $\frac{z_1}{z_2}$ , avec l'angle  $\alpha$  et avec le coefficient  $\varphi$ .

Après la ligne des centres, la transmission de l'énergie d'une roue à un pignon est d'autant plus défavorable que le rapport d'engrenage et l'angle parcouru par le pignon après la ligne des centres sont plus grands.

Il est parfois impossible de modifier le rapport  $\frac{z_1}{z_2}$ , mais en augmentant les nombres des dents  $z_1$  et  $z_2$  tout en conservant leur rapport, l'angle de conduite peut être réduit ; la valeur de  $\operatorname{tg} \alpha$  est alors plus petite.

Examinons les conditions d'équilibre en tenant compte du frottement quand la roue conduit le pignon avant la ligne des centres. C'est le cas représenté par la figure 148 : le flanc de la dent conduit la saillie de l'aile ; le contact a lieu en  $B$  sur la circonférence du cercle générateur  $O'_1$ , et la normale en  $B$  passe par le point de tangence  $A$  des circonférences primitives.



Le point de contact se déplace sur le flanc de la dent, dans la direction  $O_1B$ , et sur la saillie de l'aile, dans la direction  $BD$ .

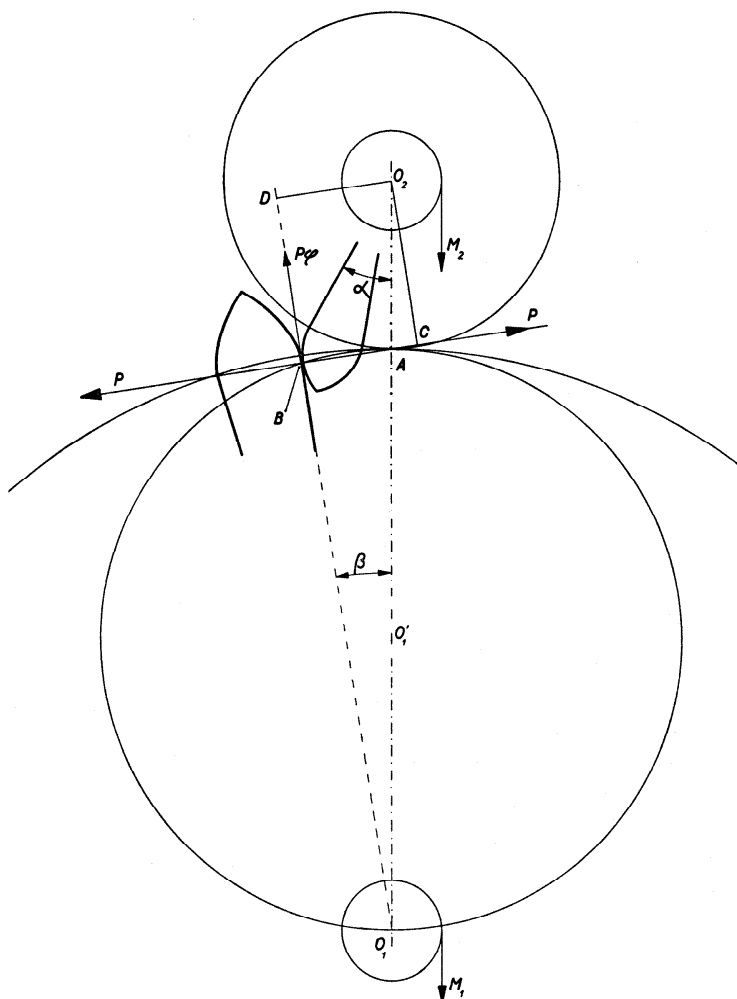


Fig. 148

Les équations d'équilibre sont, pour la roue :

$$M_1 - P \cdot O_1B = 0,$$

pour le pignon :

$$M_2 - P \cdot O_2C + P\varphi \cdot O_2D = 0.$$

D'où nous tirons aisément :

$$M_2 = M_1 \left[ \frac{r_2}{r_1} - \varphi \left( 1 + \frac{r_2}{r_1} \right) \operatorname{tg} \beta \right].$$

Le terme perturbateur est :

$$\varphi \left( 1 + \frac{r_2}{r_1} \right) \operatorname{tg} \beta = \varphi \left( 1 + \frac{z_2}{z_1} \right) \operatorname{tg} \beta.$$

Il peut être réduit si nous augmentons  $z_1$  et  $z_2$  tout en conservant leur rapport.

Nous pouvons donner la valeur de  $M_2$  sous la forme :

$$M_2 = M_1 \left[ \frac{z_2}{z_1} - \varphi \left( 1 + \frac{z_2}{z_1} \right) \operatorname{tg} \left( \alpha \frac{z_2}{z_1} \right) \right], \quad (75)$$

puisque, à cause du rapport des vitesses :

$$\beta r_1 = \alpha r_2,$$

soit :

$$\beta = \alpha \frac{r_2}{r_1} = \alpha \frac{z_2}{z_1}.$$

**Comparaison entre les moments de force transmis avant et après la ligne des centres.** — L'opinion est assez répandue que le frottement dans les engrenages est plus considérable, partant plus néfaste, avant la ligne des centres qu'après. Il est intéressant de calculer, pour un cas donné, les moments de forces transmis. Choisissons un cas où l'*arc d'approche* est assez grand, l'engrenage 60/6. Admettons les valeurs suivantes :

$$M_1 = 1 \text{ g*mm}, \quad \varphi = 0,2.$$

L'*angle de retraite* du pignon, c'est-à-dire l'angle dont est conduit le pignon après la ligne des centres, est :

$$\alpha = 42^\circ 15' 45''.$$

Nous avons, d'après la formule (74) :

$$M_2 = \frac{M_1}{\frac{z_1}{z_2} + \varphi \left( \frac{z_1}{z_2} + 1 \right) \operatorname{tg} \alpha},$$

soit :

$$M_2 = \frac{1}{10 + 0,2 \cdot 11 \cdot \operatorname{tg} 42^\circ 15' 45''} = 0,0833 \text{ g*mm}.$$

Si le frottement n'existait pas, nous aurions :

$$M_2 = 0,1 \text{ g*mm.}$$

Il y a donc, à cause du frottement, une perte de :

$$0,0167 \text{ g*mm} \quad \text{ou} \quad 16,7 \, \%.$$

Le premier contact de la dent de la roue a lieu à  $17^\circ 44' 15''$  avant la ligne des centres. Pour cet instant, nous pouvons calculer le moment transmis au moyen de la formule (75) :

$$M_2 = 1 [0,1 - 0,2 \cdot 1,1 \cdot \text{tg} (17^\circ 44' 15'' \cdot 0,1)] = 0,0932 \text{ g*mm.}$$

La perte due au frottement est :

$$0,0068 \text{ g*mm} \quad \text{ou} \quad 6,8 \, \%.$$

Nous avons un résultat surprenant : la perte due au frottement lors du premier contact (avant la ligne des centres) est plus petite que celle qui se produit au moment du dernier contact (après la ligne des centres).

N'oublions pas cependant que les angles  $\alpha$  jouent un grand rôle dans les formules (74) et (75) ; or, ils sont très différents dans les deux cas que nous avons envisagés : l'angle d'approche vaut  $17^\circ 44' 15''$ , tandis que l'angle de retraite vaut  $42^\circ 15' 45''$ . Pour que la comparaison des pertes dues au frottement « rentrant » et au frottement « sortant » soit légitime, il faut que ces pertes correspondent à des angles égaux.

Calculons le moment  $M_2$  pour un angle de retraite égal à la valeur maximum de l'angle d'approche, soit pour  $\alpha = 17^\circ 44' 15''$  :

$$M_2 = \frac{1}{10 + 0,2 \cdot 11 \cdot \text{tg} 17^\circ 44' 15''} = 0,0934 \text{ g*mm.}$$

La perte due au frottement s'élève à :

$$0,0066 \text{ g*mm} \quad \text{ou} \quad 6,6 \, \%.$$

Quand le contact a lieu à la même distance avant la ligne des centres, la perte est de 6,8 %.

La différence entre ces deux valeurs est insignifiante ; l'opinion des horlogers sur l'importance considérable du frottement « rentrant » est erronée ; elle a été suscitée par des phénomènes dont nous parlerons plus loin.

**La conduite par le pignon.** — On peut employer la même méthode pour déterminer la valeur du moment de force transmis lorsque c'est le pignon qui conduit la roue.

Qu'on se reporte aux figures 147 et 148 ; quand le pignon conduit la roue avant la ligne des centres, on a la même disposition des dents que lorsque la roue conduit le pignon après la ligne des centres (fig. 147) ; le sens du mouvement est renversé ; il en est de même pour la direction de la force de frottement  $P\varphi$ .

On trouve, pour la conduite avant la ligne des centres :

$$M_1 = M_2 \left[ \frac{z_1}{z_2} - \varphi \left( 1 + \frac{z_1}{z_2} \right) \operatorname{tg} \alpha \right] \quad (76)$$

et, pour la conduite après la ligne des centres (fig. 148) :

$$M_1 = M_2 \frac{1}{\frac{z_2}{z_1} + \varphi \left( 1 + \frac{z_2}{z_1} \right) \operatorname{tg} \left( \alpha \frac{z_2}{z_1} \right)} \quad (77)$$

**Le frottement.** — Lorsque deux corps glissent ou roulent l'un sur l'autre, il se produit une résistance — le frottement — qui s'oppose au mouvement.

Considérons (fig. 149) un corps  $A$  de poids  $P$  placé sur une face plane et horizontale  $B$  du corps  $C$ . Si nous donnons une impulsion dans le sens de la flèche, le corps  $A$  se déplacera, parcourra une certaine distance, puis s'arrêtera. La force  $F$  qui suffirait pour donner à  $A$  une vitesse de translation uniforme est égale au frottement que nous considérons ici comme une force, bien qu'à lui seul il soit incapable de provoquer un mouvement ; c'est une force passive ou une résistance passive.

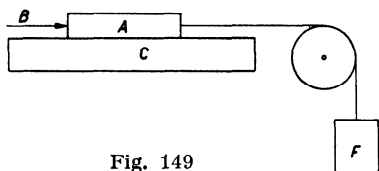


Fig. 149

Remarquons que, pour mettre le corps  $A$  en mouvement, il faut parfois plus de force que pour entretenir le mouvement uniforme lorsque  $A$  est en mouvement. Nous distinguerons donc le *frottement au départ* du *frottement pendant le mouvement*. La différence entre ces deux sortes de frottements provient sans doute d'une adhérence des deux corps, qu'il faut d'abord vaincre ; en effet, dans certaines expériences de Coulomb, le frottement au départ est d'autant plus grand que les deux corps ont été plus longtemps en contact avant que se produise le mouvement. En augmentant la durée du contact, le frottement augmente jusqu'à un certain maximum.

Dans le cas du glissement de deux métaux non graissés, le frottement au départ est peu différent du frottement pendant le mouvement.

Le frottement au départ peut être influencé par les facteurs suivants :

1° nature des substances dont sont formés les corps en contact et de leurs enduits,

2° état des surfaces frottantes,

3° étendue des surfaces,

4° pression entre les deux corps,

5° durée du contact des deux corps avant l'expérience.

Le frottement pendant le mouvement peut dépendre des quatre premiers facteurs et d'un cinquième qui est la vitesse de translation.

Les expériences faites par différents physiciens ont montré que l'étendue des surfaces ne joue aucun rôle dans la valeur du frottement. Ce fait assez curieux tient à la nature du frottement dont la cause réside essentiellement dans l'état des surfaces, celles-ci pouvant être plus ou moins rugueuses, plus ou moins parsemées de bosses et de creux ; certaines bosses de l'une des surfaces pouvant se trouver dans les creux de l'autre, le déplacement d'un des corps par rapport à l'autre n'est possible qu'en soulevant légèrement le corps à mouvoir. Or, le poids du corps *A* ne dépend pas de l'étendue de la surface de contact.

Il est important de considérer ici la pression spécifique, c'est-à-dire la pression par unité de surface. L'expérience montre que la pression spécifique ne doit pas être trop grande (pour les métaux utilisés en horlogerie, elle ne doit pas dépasser 50 kg\*/cm<sup>2</sup> ou 0,5 kg\*/mm<sup>2</sup>), sinon il peut se produire des grippements ou des arrachements quand un des corps a été plus ou moins enfoncé dans l'autre ; les surfaces en contact peuvent être profondément altérées ce qui modifie considérablement le frottement.

Il est généralement admis que, dans le cas de frottement dans les mécanismes d'horlogerie, la valeur du frottement est indépendante de la vitesse ; cette valeur ne dépend donc que de la nature des corps, de l'état des surfaces frottantes et de la pression normale entre les corps.

Appelons *P* la pression normale, *F* le frottement, nous aurons :

$$F = P \varphi,$$

formule dans laquelle  $\varphi$  est le *coefficient de frottement* ; sa valeur dépend de la nature des corps et de l'état des surfaces. Pour un corps (pivot) en acier trempé et poli, tournant dans un coussinet en rubis également poli, nous admettons :

$$\varphi = 0,11 \text{ à } \varphi = 0,15.$$

La valeur de ce coefficient est toujours un peu incertaine puisque l'état des surfaces est difficilement définissable. Dans les expériences sur le frottement, cette incertitude se traduit par la difficulté d'obtenir des résultats cohérents, parce qu'il est malaisé de réaliser plusieurs fois de

suite les mêmes conditions. Ainsi un grain de poussière entre les surfaces en contact peut modifier considérablement la valeur de  $\varphi$ .

Nous déterminerons  $\varphi$  au moyen d'un plan incliné. Soit  $AB$  (fig. 150)

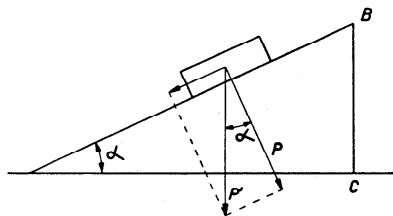


Fig. 150

un plan incliné sur lequel est posé un corps de poids  $P'$ . Augmentons peu à peu l'inclinaison du plan jusqu'à ce que le corps se mette à glisser. A ce moment la composante tangentielle de  $P'$  est :

$$P' \sin \alpha,$$

tandis que la pression normale vaut :

$$P = P' \cos \alpha.$$

La force  $P' \sin \alpha$  tend à faire glisser le corps le long de  $AB$ , tandis que le frottement au départ  $F$  s'y oppose ; au moment où le corps commence à glisser, les deux forces sont égales :

$$F = P' \sin \alpha.$$

Mais

$$F = P\varphi = P' \cos \alpha \cdot \varphi,$$

d'où :

$$P' \cos \alpha \cdot \varphi = P' \sin \alpha,$$

soit :

$$\varphi = \operatorname{tg} \alpha.$$

L'angle  $\alpha$  est l'angle d'inclinaison du plan  $AB$  au moment où le glissement commence : c'est l'angle de frottement. Le coefficient de frottement est égal à la tangente de l'angle de frottement.

Pour avoir le coefficient de frottement pendant le mouvement, il faut déterminer un angle d'inclinaison  $\alpha$  tel que le corps, une fois mis en mouvement, garde une vitesse constante ; à ce moment  $\varphi = \operatorname{tg} \alpha$ .

Donnons au plan une inclinaison  $\alpha' > \alpha$ . Nous provoquons ainsi un mouvement accéléré. L'accélération  $\gamma$  est due à la différence entre la force qui tend à faire glisser le corps, c'est-à-dire  $P' \sin \alpha'$  et le frottement  $F$ . Si nous admettons que cette différence ne varie pas pendant le glissement, l'accélération  $\gamma$  est constante. Nous pouvons déterminer  $\gamma$  en notant les chemins parcourus pendant 1, 2, 3 secondes.

La force motrice est :

$$P' \sin \alpha' - F = P' \sin \alpha' - P' \cos \alpha' \cdot \varphi,$$

mais l'accélération est le quotient de la force par la masse du corps en mouvement :

$$\gamma = \frac{P' \sin \alpha' - P' \cos \alpha' \cdot \varphi}{\frac{P'}{g}} = g (\sin \alpha' - \varphi \cos \alpha').$$

**Le frottement de roulement.** — On sait qu'il est plus facile de déplacer un corps par roulement que par glissement. Pour déplacer de grandes charges, on les met sur des rondins au lieu de les traîner sur le sol. Cependant il y a aussi une résistance au roulement, un *frottement de roulement*, qui est plus faible que le frottement de glissement.

Lorsqu'un corps rond (rouleau) roule sur une surface plane, le frottement est proportionnel à la pression et inversement proportionnel au rayon du rouleau ; il dépend aussi de l'état des surfaces sur lesquelles a lieu le roulement.

On a essayé de remplacer, dans les montres, le frottement des pivots dans les coussinets par un frottement de roulement sur des billes en acier poli. Ce serait un moyen de réduire considérablement le frottement et peut-être aussi de résoudre le problème si important du graissage.

**Le rôle des lubrifiants.** — Pour obtenir un mouvement, il faut vaincre cette résistance qu'est le frottement ; pour cela, il faut sacrifier une partie de l'énergie à transmettre. Or l'énergie absorbée par le frottement produit l'usure des pièces, qu'il convient d'éviter, et en même temps une augmentation de la température qui, dans les rouages d'horlogerie, est heureusement trop faible pour être nuisible.

Pour diminuer le frottement, on utilise des matières dures susceptibles d'un beau poli ; quand on le peut, on remplace le glissement par le roulement, et enfin on enduit les surfaces frottantes avec un corps gras.

Les substances grasses (graisses ou huiles) remplissent les creux des surfaces et séparent les deux corps solides : le coefficient de frottement est alors considérablement diminué.

Dans les grosses machines, on utilise le graissage continu ; ce procédé ne peut pas être appliqué aux mécanismes des montres et des horloges. En horlogerie le problème du graissage est capital, mais il a ses solutions propres, car une très faible quantité d'huile doit assurer la lubrification des organes pour plusieurs mois, voire plusieurs années. Les exigences auxquelles doivent répondre les huiles d'horlogerie sont tout autres que celles imposées aux huiles de graissage des turbines, dynamos ou moteurs d'aviation.

Les propriétés que devraient avoir les huiles d'horlogerie sont nombreuses et parfois contradictoires. Le choix d'une huile doit être guidé par l'examen des propriétés suivantes : onctuosité, viscosité, évaporation, congélation, résistance aux agents chimiques tels qu'acides, oxygène de

l'air, soufre et phosphore des aciers de décolletage, formation en gouttes (résistance à l'étalement).

L'*onctuosité* est difficile à définir, mais on sent, au toucher, la différence entre une huile grasse comme l'huile d'olive et certains produits de la distillation des huiles lourdes du pétrole.

La *viscosité* ou *frottement interne* résulte de la difficulté qu'éprouvent les molécules à glisser les unes sur les autres ; elle se mesure au moyen du viscosimètre. Les mesures de viscosité sont basées sur la vitesse d'écoulement du liquide dans un tube capillaire ; cette vitesse dépend d'un certain nombre de facteurs d'après la loi de Poiseuille, exprimée dans la formule :

$$\eta = \frac{\pi h d R^4 t}{8 l V},$$

où  $\eta$  est la viscosité,  $h$  la hauteur de la colonne de liquide qui s'écoule,  $d$  la densité du liquide,  $R$  et  $l$  le rayon et la longueur du tube capillaire,  $V$  le volume du réservoir  $R_1$  (fig. 151),  $t$  la durée d'écoulement entre les repères  $A$  et  $B$ . On peut aussi déterminer la viscosité d'un liquide en y laissant tomber une bille de poids et de dimension connus et en mesurant la hauteur et la durée de la chute.

La viscosité est fortement influencée par la température. Comme les montres peuvent être soumises à de fortes variations de température, on doit rechercher une huile dont la viscosité varie peu avec la température.

Les points d'*évaporation* et de *congélation* d'une huile sont importants, puisque les montres peuvent être soumises à des températures qui, si elles sont supérieures à celle d'évaporation de l'huile, feront disparaître celle-ci ou, si elles sont plus basses que le point de congélation de l'huile, rendront celle-ci solide et augmenteront considérablement le coefficient de frottement.

La *résistance à l'oxygène, aux acides, au soufre et au phosphore* est une propriété chimique. Les huiles organiques (animales ou végétales) rancissent avec le temps, c'est-à-dire sont altérées par l'oxygène de l'air. Ce phénomène ne se produit pas avec les huiles minérales.

La *formation en gouttes* est une qualité très précieuse pour les huiles d'horlogerie. Grâce à leur tension superficielle, les huiles forment des gouttes et restent au point où on les a mises.

Les huiles minérales ont le défaut très grave de s'étaler. Ce phénomène est dû à la réaction du support (pierre ou pièce métallique) sur l'huile.

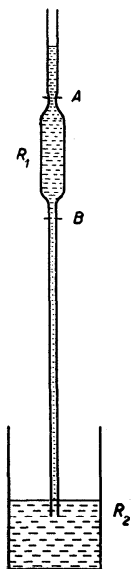


Fig. 151



On combat l'étalement en mettant entre le lubrifiant et le corps à graisser une couche très mince d'acide stéarique appelée *épilame*.

Le contrôle de ces différentes propriétés se fait au laboratoire, et ceci depuis peu de temps. Auparavant on se contentait d'observer le comportement des huiles dans les montres et dans les horloges et il arrivait fréquemment qu'avec des huiles qu'on croyait identiques, on obtenait des résultats contradictoires. Car une huile de pied de bœuf, par exemple, peut être bien différente d'une autre huile de pied de bœuf, soit que les matières premières d'où l'huile a été extraite aient été différentes, soit qu'elles aient été traitées différemment.

**Les huiles pour l'horlogerie.** — En horlogerie, on a utilisé des huiles animales (huile de pied de bœuf, de pied de mouton, huile de marsouin ou de spermaceti), des huiles végétales, des huiles minérales obtenues par distillation de l'huile lourde, ou des mélanges de différentes huiles. Les deux premières catégories contiennent les huiles organiques qui sont généralement onctueuses, forment des gouttes, mais ne résistent pas à l'oxydation. Quant aux huiles minérales qui, elles, résistent mieux aux agents chimiques, elles ont le grand inconvénient de s'étaler. Actuellement on utilise fréquemment un mélange d'huile minérale et d'huile de pied de bœuf.

Aujourd'hui, on recherche d'autres solutions ; on fait des essais avec des produits chimiques, des *huiles artificielles* que l'on appelle parfois « huiles synthétiques ». Ces huiles ont généralement un point de congélation extrêmement bas, ce qui les rend aptes au graissage des instruments utilisés dans l'aéronautique ; elles résistent bien aux agents chimiques, mais manquent souvent d'onctuosité.

Le problème des huiles d'horlogerie n'est donc pas encore résolu ; il ne pourra l'être que par des recherches longues et patientes faites par des chimistes expérimentés dans des laboratoires bien outillés.

Il est probablement vain de rechercher une huile qui pourrait être appliquée avec le même succès à tous les organes de la montre ou à toutes les montres, qu'elles soient des montres soumises aux variations normales de la température au sol ou des chronomètres de bord pour l'aviation.

Si la pression entre les corps en contact, par exemple entre un pivot et son coussinet ou entre les lames d'un ressort de barillet, est forte, il faut utiliser une huile visqueuse ; le graissage des ressorts de barillet peut très bien être fait au moyen de graisses.

Pour les organes de l'échappement et pour le balancier, où les pressions sont très faibles, il faut employer une huile fluide.

Il importe d'éviter tout ce qui peut altérer les huiles. Il faut prendre les précautions les plus minutieuses pour que des impuretés ne puissent

s'introduire dans le lubrifiant : la plus grande propreté est de rigueur. L'inobservation de cette règle est souvent la cause des résultats décevants obtenus avec des huiles qui méritent mieux que cela.

**Le frottement des corps enduits.** — Parmi les facteurs influençant le frottement, nous n'avons pas mentionné la vitesse avec laquelle le mouvement se produit. Il est souvent admis que le frottement est indépendant de la vitesse. Cette loi est attribuée à Charles Augustin de Coulomb (1736-1804) qui fit des recherches célèbres sur le frottement. Cependant Coulomb avait constaté que, dans certains cas, le frottement dépend de la vitesse, mais qu'en général, dans les machines, les vitesses ne sont pas assez considérables pour modifier notablement le frottement. Il avait remarqué le fait suivant : le corps *A* (fig. 149) tiré par le poids *F* prend parfois un mouvement accéléré, dont l'accélération diminue jusqu'à devenir nulle au fur et à mesure que la vitesse augmente ; son mouvement tend ainsi à devenir uniforme ; lorsqu'il l'est, aucune force n'agit sur le corps, donc le frottement est égal à *F*.

Mais quand le mouvement est accéléré, l'accélération  $\gamma$  est :

$$\gamma = \frac{F - \text{frottement}}{\frac{P}{g}} = \frac{(F - F')g}{P},$$

si nous désignons le frottement par *F'*. Pour que l'accélération soit positive, il faut que  $F > F'$ .

Depuis Coulomb bien des recherches au sujet du frottement des corps graissés ont été entreprises. Rappelons une étude<sup>1</sup>, faite en 1923 au Laboratoire suisse de recherches horlogères, sur le frottement de pivotement dans des conditions rappelant celles qui sont réalisées dans les montres et dans les horloges. Les expériences en question ont montré que le frottement est une fonction assez imprévue de la vitesse. En effet, si nous représentons (fig. 152) le coefficient de frottement  $\varphi$  en fonction de la vitesse angulaire  $\omega$  dans le cas d'un pivot graissé tournant dans un coussinet en rubis, nous voyons que le coefficient, qui est d'abord considérable, diminue rapidement dès que la vitesse augmente, passe par un minimum très accentué, puis croît avec la vitesse. Cette allure curieuse de la courbe s'explique si nous admettons qu'aux très petites vitesses, le contact a lieu entre le pivot et la pierre ; au fur et à mesure que la vitesse augmente, l'huile pénètre entre le pivot et le coussinet et tend à séparer ces deux organes, ce qui diminue le coefficient de frottement. Il y a donc au départ un

<sup>1</sup> *Recherches expérimentales sur le frottement de pivotement*, par A. JAQUEROD, L. DEFOSSEZ et H. MÜGELI (*Journal suisse d'horlogerie et de bijouterie*, 1923).

frottement solide qui diminue dès que le pivot tourne et qu'intervient le frottement visqueux que nous supposons être proportionnel à la vitesse.

La courbe 1 de la figure 152 serait la résultante de la courbe 2, indiquant la variation du frottement solide avec la vitesse, et de la courbe 3, représentation de la variation du frottement visqueux. La partie ascendante de la courbe 1 est à peu près une droite passant par l'origine; elle serait uniquement due au frottement visqueux (courbe 3) proportionnel à la vitesse.

Cette interprétation semble confirmée par les constatations suivantes : pour un pivot horizontal, au repos, le point de contact entre le pivot et le coussinet se trouve en *A* (fig. 153 a); dès que le pivot se met à tourner dans le sens de la flèche, le point de contact se déplace brusquement en sens inverse du mouvement jusqu'en *B* (fig. 153 b). Si la vitesse continue à augmenter, le point de contact rebrousse et arrive en *C* (fig. 153 c), puis en *D* (fig. 153 d). A partir

d'une certaine vitesse, le pivot se détache entièrement de la pierre dont il est séparé par une couche ininterrompue d'huile. Admettons qu'aux très grandes vitesses, le pivot est parfaitement centré dans la pierre. Dès que le pivot est détaché de la pierre, le frottement

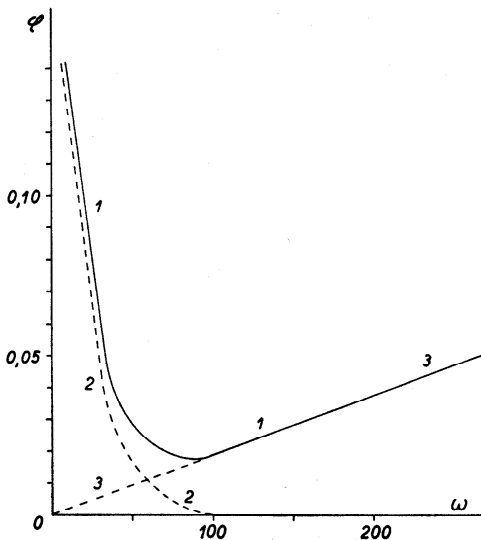


Fig. 152

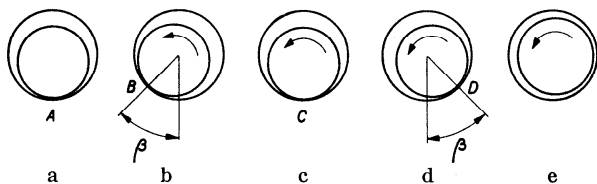


Fig. 153

entre pivot et coussinet n'existe plus : il est remplacé par le frottement entre le pivot et le lubrifiant et celui de la couche d'huile entraînée contre les parois du coussinet. Seul le frottement pivot-huile nous intéresse, puisqu'il est le seul à agir sur le mouvement du mobile.

L'état de la surface de la pierre ne joue plus aucun rôle, mais la viscosité du lubrifiant et la vitesse du pivot interviennent.

L'angle  $\beta$  est en rapport avec le frottement. Supposons que le point de contact soit en  $B$  (fig. 154). Deux forces agissent sur le pivot de centre  $O$  : le poids  $P$  du mobile ( $P$  peut aussi comprendre tout ou partie de la pression latérale subie par le pivot du fait des autres roues du rouage), qui tend à ramener le point de contact vers le bas, et le frottement  $F$  dont l'effet est d'éloigner  $B$ . L'équilibre s'établit lorsque la composante tangentielle  $P \sin \beta$  de  $P$  est égale et de sens contraire à  $F$  :

$$P \sin \beta = F.$$

La pression normale étant égale à  $P \cos \beta$ , le frottement vaut :

$$F = P \cos \beta \cdot \varphi,$$

d'où :

$$\varphi = \frac{P \sin \beta}{P \cos \beta} = \operatorname{tg} \beta.$$

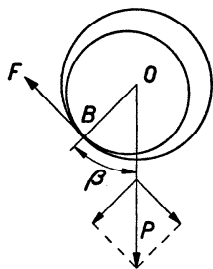


Fig. 154

L'angle  $\beta$  est égal à l'angle de frottement.

Lorsque la vitesse augmente, le point de contact se déplace dans l'autre sens, ce qui ne peut s'expliquer si le frottement intervient seul car, par définition, il est dirigé en sens inverse du mouvement. La couche d'huile en forme de coin est comprimée à la suite du mouvement du pivot ; cette compression tend à soulever le pivot, mais cette force est difficile à évaluer.

Ces expériences faites avec des pivots de 1 mm de diamètre confirment celles qui furent faites avec des pivots de plus grandes dimensions. Il ne faut cependant pas oublier que les impuretés qui peuvent s'introduire dans le lubrifiant (poussières, bulles d'air, gouttelettes d'eau, etc...) jouent, en horlogerie, un rôle beaucoup plus considérable à cause de la petitesse des pièces et des forces en action.

Nous voyons que les lois du frottement généralement appliquées ne conviennent pas du tout aux pivots graissés, c'est-à-dire aux pivots des montres et des horloges. Elles sont d'autant moins exactes que, dans les instruments horaires, nous n'avons pas affaire à un mouvement continu, mais ou bien à un mouvement saccadé et de sens constant ou bien à un mouvement alternatif de vitesse très variable.

Nous ne pouvons pas évaluer le coefficient de frottement dans le cas des pivots graissés, car il dépend de la vitesse, de la viscosité du lubrifiant et, sans doute aussi, du diamètre du pivot ainsi que du jeu. En calculant avec un coefficient  $\varphi$  constant, nous restons dans une très grossière approximation.

L'erreur est moins considérable quand nous calculons le frottement des roues d'engrenage, puisque les dents ne sont pas lubrifiées et qu'il s'agit d'un mouvement saccadé de très petite durée (à peine  $10^{-2}$  s), suivi d'un repos beaucoup plus long. Pour les surfaces graissées, les valeurs de  $\varphi$  utilisées sont très petites ( $\varphi = 0,10$  à  $\varphi = 0,15$  pour l'acier sur le rubis), mais les calculs sont très approximatifs.

Le frottement donne pas mal de soucis au praticien parce qu'il provoque l'usure des pièces et l'irrégularité de la marche des montres et des horloges ; il n'en cause pas moins au technicien qui s'efforce d'en tenir compte dans ses calculs ; il est surtout désagréable en raison de ses variations souvent imprévisibles dues à l'altération de l'huile, à l'usure qui modifie les surfaces frottantes ou à des corps étrangers.

Si le frottement était constant, il n'aurait aucun inconvénient dans les engrenages, pourvu que les profils des dents soient tels que la résultante entre la pression normale et le frottement passe toujours par le point de tangence des circonférences primitives. Mais, puisque le frottement varie avec le temps, nous pouvons affirmer que le problème de la transmission absolument régulière de l'énergie est insoluble.

Dans cette incertitude, ce qu'il a de mieux à faire, c'est de diminuer le frottement autant que possible ; c'est ainsi seulement que nous pouvons espérer en diminuer les variations et les effets néfastes.

**Les solutions approchées du problème des profils.** — La règle de la normale commune pour la détermination des profils ne suffit pas puisqu'on ne saurait supprimer le frottement. D'autre part, même pour des surfaces non graissées, celui-ci, varie d'un cas à l'autre et dépend de la rugosité ou du poli des surfaces ; il varie avec le temps, soit normalement à cause de l'usure qui modifie l'état des surfaces, soit accidentellement lorsque s'introduit entre les corps en contact un grain de poussière, un corps gras ou un peu d'humidité.

A côté du frottement des dents entre elles, d'autres facteurs peuvent avoir une influence sur la transmission de l'énergie ; certains de ces facteurs sont inévitables, tels le frottement des pivots contre les coussinets, et le jeu des pivots, qui empêche de définir exactement la distance des centres ; d'autres facteurs sont accidentels : ce sont des défauts comme les mauvaises dimensions des diamètres totaux, la distance des centres inexacte.

Même en ne tenant compte que des facteurs inévitables, on ne peut résoudre de façon parfaite le problème des profils. Mais on peut trouver des solutions approchées et l'on doit chercher à améliorer les solutions existantes.

**Méthode expérimentale pour reconnaître la valeur des profils.** — Lorsqu'on cherche à améliorer la forme des dents des roues, il faut disposer d'un moyen de reconnaître la valeur des profils, sous peine de marcher à tâtons et de perdre beaucoup de temps.

Si l'énergie est transmise régulièrement du barillet à l'échappement, les impulsions d'entretien du mouvement du balancier auront toujours

la même intensité et l'amplitude des oscillations sera constante aussi longtemps que température et position seront les mêmes.

Une méthode d'enregistrement de l'amplitude de chaque oscillation du balancier a été imaginée et réalisée par A. Jaquerod et H. Mûgeli au Laboratoire suisse de recherches horlogères. En voici le principe tel que les auteurs le décrivent; un fil d'acier droit et poli est placé radialement dans un trou de la serge du balancier; « à l'aide d'une lentille on éclaire vivement ce doigt qui joue le rôle d'un miroir cylindrique et donne, d'une source lumineuse, une image linéaire très fine. Lorsque le balancier arrive à l'extrémité de sa course, au point de rebroussement, sa vitesse s'annule; le

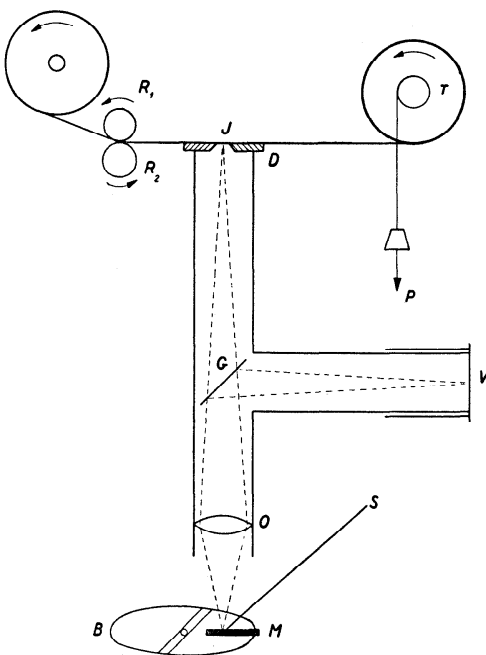
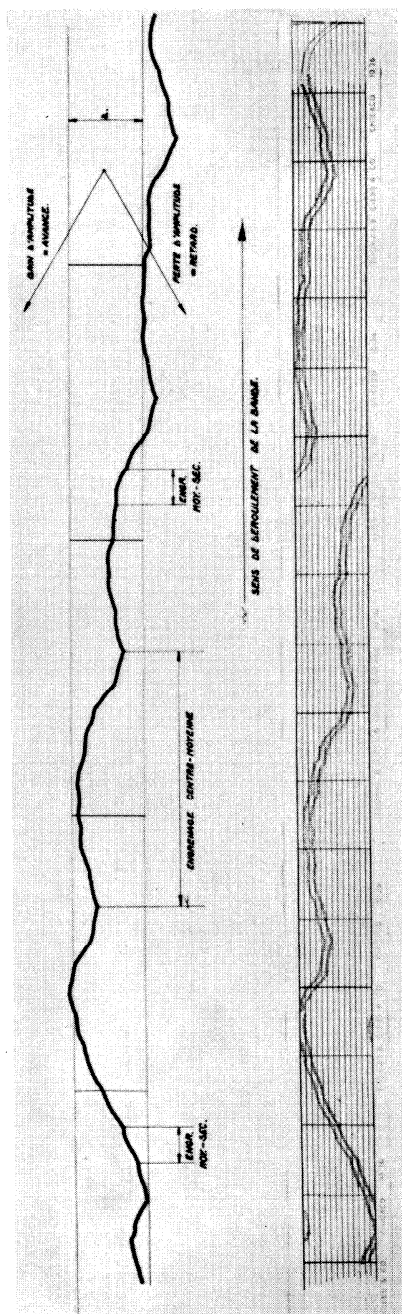


Fig. 155

doigt d'acier donne alors durant un instant une image très brillante, qu'on appellera « éclair », dont la position est facile à repérer, tandis que, lorsque la vitesse est appréciable, on ne voit qu'une traînée lumineuse. Les changements de position de cet éclair lumineux indiquent par conséquent les variations de l'amplitude. »

On enregistre photographiquement la position du doigt arrivé au point de rebroussement; la figure 155 montre le schéma du dispositif: *M* est le doigt éclairé par une lampe *S*; *O* est l'objectif d'un microscope; *G* une lame de verre à 45° qui réfléchit une partie des rayons lumineux provenant de *M* sur le verre dépoli *V* et laisse passer une autre partie des mêmes rayons; ces derniers forment une image en *J* où passe un film animé d'un mouvement uniforme; il en résulte un diagramme du genre de ceux qui



Pl. VII, fig. 157





sont représentés dans la figure 156. Le diagramme est une courbe interrompue périodiquement ; entre deux coupures, il s'est écoulé 1 minute, ce qui permet d'évaluer le temps qui sépare deux maxima par exemple. On peut ainsi déterminer l'engrenage qui a provoqué deux maxima successifs. Certains maxima sont plus accentués que d'autres : ils sont produits par les premières roues du rouage (barillet et pignon des minutes), car c'est là que les différences entre les moments de force transmis sont les plus grandes ; le temps écoulé entre deux de ces maxima plus importants

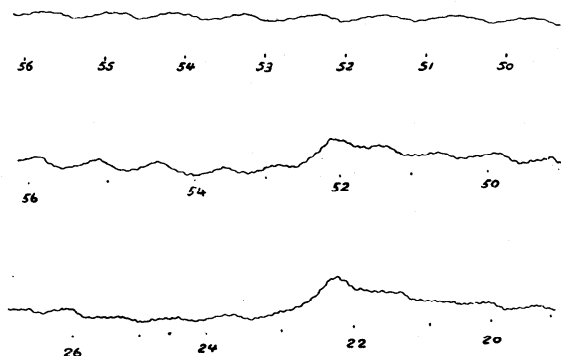


Fig. 156

est celui du passage d'une dent du barillet dans le pignon des minutes (6 minutes pour un pignon de 10 ailes ; 5 minutes pour un pignon de 12).

Les deuxième et troisième diagrammes (fig. 156) sont ceux d'une montre courante ; le premier a été pris sur un excellent chronomètre de bord. La différence entre les deux courbes est frappante ; elle est une image de la différence entre la valeur des engrenages des deux montres.

Au lieu de photographier le balancier à chaque oscillation, on peut déterminer la période de chaque oscillation au moyen d'une machine à mesurer la marche instantanée des montres. Si le balancier de la montre sur laquelle on opère a des oscillations isochrones, la période est indépendante de l'amplitude du balancier ; il n'en est pas de même si l'on utilise une montre dans laquelle on a créé un gros défaut d'isochronisme. Les oscillations d'un balancier déséquilibré ne sont pas isochrones lorsque la montre est dans une position verticale ; les fluctuations de la période reflètent celles de l'amplitude du balancier. La figure 157 (pl. VII), prise à La Chaux-de-Fonds et communiquée par Samuel Guye, auteur de cette méthode, montre les variations de la période du balancier en fonction du temps ; le centre de gravité du balancier au repos se trouve au-dessous de l'axe, sur la verticale passant par le centre, lorsque la montre est dans la position dans laquelle elle sera observée.

La courbe obtenue ressemble à celle qui représente l'amplitude en fonction du temps (fig. 156).

Ces courbes indiquent, en gros, la manière dont l'énergie est transmise par tout le rouage ; elles ne montrent pas où se trouvent les défauts. Pour trouver ceux-ci, il faut recourir à des méthodes différentes qui sont étudiées dans les pages qui suivent.

#### **Etude graphique de la transmission de la force dans les engrenages. —**

Il est possible d'étudier les engrenages et de déterminer l'influence sur la transmission de la force de certains facteurs, tels que la forme des dents, la distance des centres, les diamètres des roues, les tolérances et les jeux, au moyen de dessins à grande échelle exécutés avec soins.

Nous savons que les formes théoriques des dents n'assurent pas une transmission régulière de la force, puisque ces formes ont été déterminées en négligeant le frottement. A cause de cela, il y a lieu de remplacer les profils théoriques par des profils un peu différents mais plus faciles à exécuter ; ce sont généralement des arcs de circonférence.

Mais il est nécessaire de se rendre compte de l'effet de cette substitution ; n'allons-nous pas en effet rendre la transmission de la force plus mauvaise au lieu de l'améliorer ?

Pour comparer deux profils nous dessinerons les positions les plus dangereuses, c'est-à-dire le premier et le dernier contact.

Supposons (fig. 158) que, sur un dessin à grande échelle, le pignon étant dessiné à part sur papier calque, nous avons déterminé le dernier point de contact  $N$  de la dent de la roue conduisant l'aile du pignon. Si le profil de la dent est un arc de cercle de centre  $A$ , la pression normale  $P_n$  passe par  $A$ . Le frottement est  $P_n\varphi$  si  $\varphi$  désigne le coefficient de frottement. La résultante  $R$  de ces deux forces fait avec la pression normale  $P_n$  l'angle  $\alpha$  tel que :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{P_n\varphi}{P_n} = \varphi ;$$

$\alpha$  est donc l'angle de frottement.

Si la résultante coupait la ligne des centres en  $I$ , la transmission de la force serait correcte ; mais  $R$  coupe  $OO'$  en  $I''$ .

Appelons  $M$  et  $M_1$  les moments de force agissant sur les deux roues en équilibre :

$$\frac{M_1}{M} = \frac{O'P'}{OP} = \frac{O'I''}{OI''}.$$

Ce rapport doit être constamment égal à :

$$\frac{M_1}{M} = \frac{O'I}{OI} = \frac{r_1}{r} = \frac{z_1}{z},$$

où  $r$ ,  $r_1$ ,  $z$  et  $z_1$  désignent les rayons primitifs et les nombres des dents de la roue et du pignon.

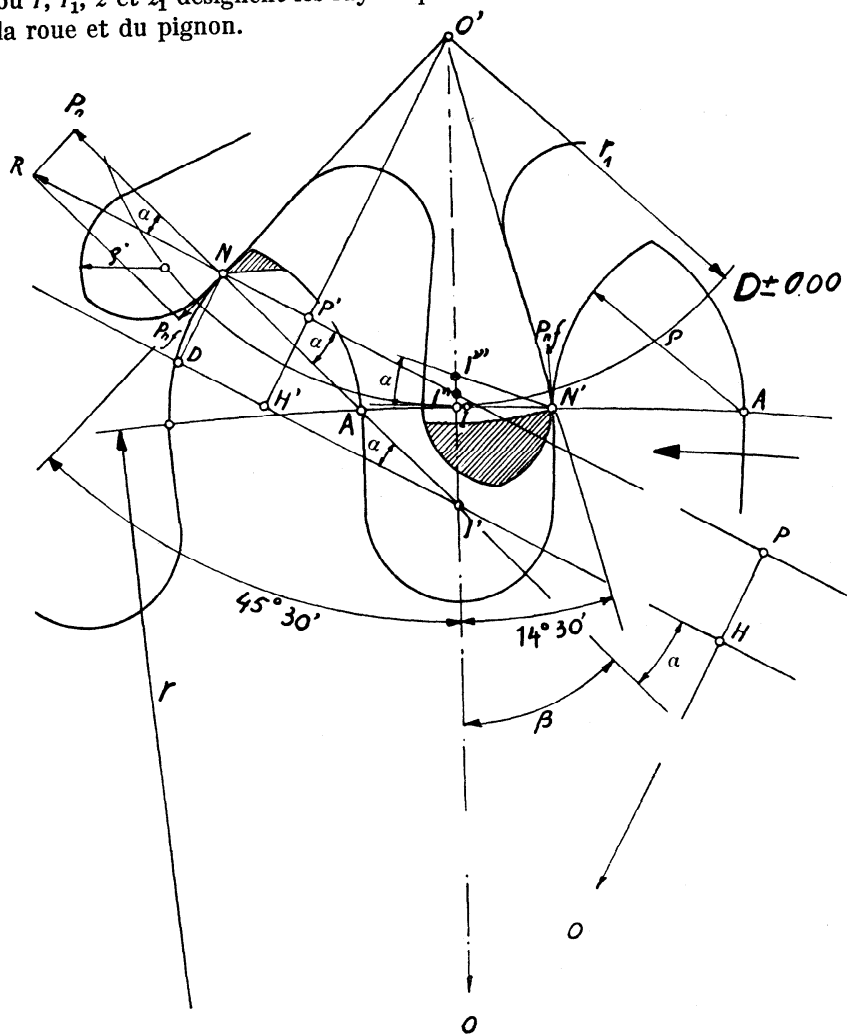


Fig. 158

Plus le point  $I''$  s'éloigne de  $I$ , plus le rapport  $\frac{M_1}{M}$  est différent de ce qu'il devrait être; plus aussi la force transmise est irrégulière, puisqu'au moment du contact en  $I$  sur la ligne des centres le moment  $M_1$  est :

$$M_1 = M \frac{z_1}{z}.$$

Appelons  $a$  la distance  $II''$ . Nous avons :

$$\frac{M_1}{M} = \frac{r_1 - a}{r + a},$$

tandis que nous devrions avoir :

$$\frac{M_1}{M} = \frac{r_1}{r}.$$

Le rapport entre la valeur réelle et la valeur idéale du rapport  $\frac{M_1}{M}$  est ce que Haag appelle le *facteur correctif*  $K$  qui devrait être toujours égal à 1 si la transmission de l'énergie était régulière :

$$K = \frac{r_1 - a}{r + a} : \frac{r_1}{r} = \frac{r(r_1 - a)}{r_1(r + a)}. \quad (78)$$

Cette formule dit bien que, pour  $a = 0$ ,  $K = 1$  et que, pour les valeurs négatives de  $a$ ,  $K > 1$ , c'est-à-dire :

$$M_1 > M \frac{z_1}{z}.$$

Dans la figure 158, nous voyons aussi que lorsque le contact a lieu en  $N'$  (premier contact avant la ligne des centres), la résultante coupe  $OO'$  en  $I'''$ ; le moment de force transmis est encore plus petit que celui qui correspond au dernier contact  $N$ .

De cette manière, nous pouvons examiner la transmission de la force, lorsque l'une des roues est trop petite ou trop grande, lorsque la distance des centres est trop petite (engrenage fort) ou trop grande (engrenage faible).

G.-A. Berner a comparé la transmission de la force au moyen de profils normalisés. La figure 159

montre que la transmission de la force devient toujours meilleure quand nous passons du profil  $A$  (demi-cercle) au profil  $B$  (ogive réduite normalisée), puis au profil  $C$  (ogive normalisée).

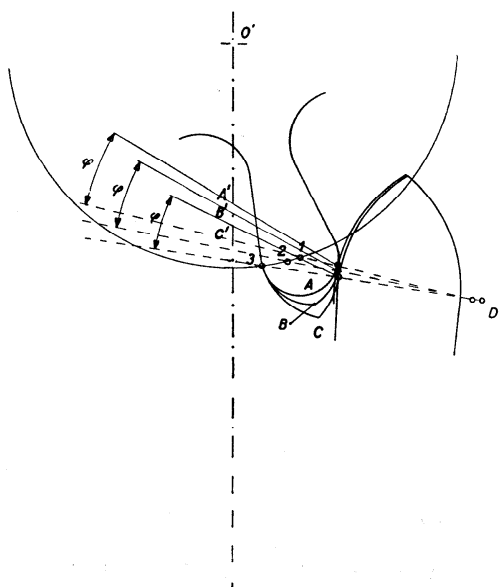
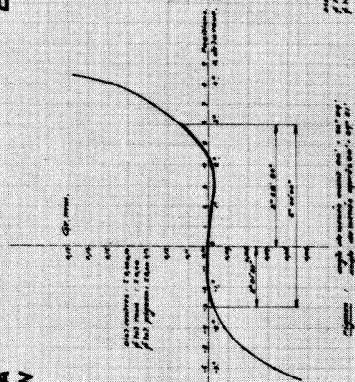


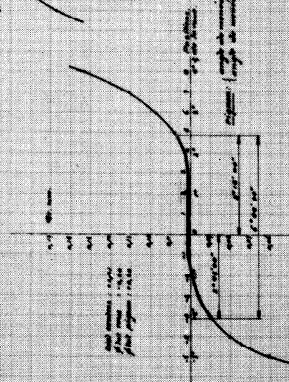
Fig. 159

# **INFLUENCE DES TOLERANCES DE FABRICATION SUR LE MOMENT DE LA FORCE TRANSMISE ET LA REPARTITION DE LA MENE.**

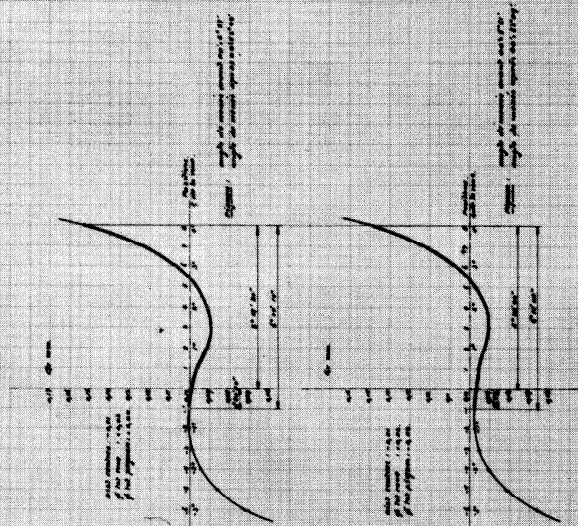
## **ENGRENAGE 60-6. MODULE 0,10**



CAS EXTREMES D'ARCEMENT



CAS EXTREMES DE CHUTE



REPARTITION DE LA FORCE TRANSMISE

REPARTITION DE LA FORCE TRANSMISE



Les moments  $M_1$  de force transmis peuvent être représentés en fonction de l'angle de rotation d'un des mobiles par une courbe qu'il est possible de construire point par point et qui a l'allure de celles reproduites par la figure 160 (pl. VII).

**Etude graphique du frottement.** — Lorsque la roue conduit le pignon, le profil de la dent roule sur celui de l'aile ; le point de contact se déplace à partir du moment du contact en  $A$ , sur la ligne des centres, de  $B$  en  $C$

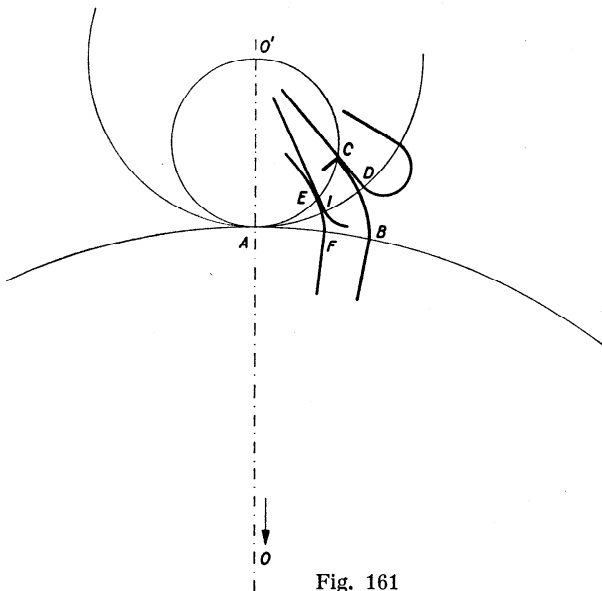


Fig. 161

(fig. 161) sur la dent de la roue, et de  $D$  en  $C$  sur le flanc de l'aile du pignon. Ces longueurs ne sont pas égales ; le roulement est accompagné d'un glissement qu'il faut déterminer parce que le frottement de glissement est beaucoup plus considérable que celui qui est provoqué par le roulement. S'il est intéressant de connaître le glissement total, il est aussi important de voir comment le glissement est réparti tout au long de la menée.

Quand le point de contact est en  $C$ , le glissement a eu lieu à partir de la ligne des centres sur une longueur égale à :

$$\text{arc } \widehat{BC} - DC.$$

Lorsque le point de contact passe de  $A$  en  $E$ , le glissement se fait sur une longueur égale à :

$$\text{arc } \widehat{FE} - IE.$$

En décomposant le profil de la dent en un certain nombre de parties égales et en déterminant les parties correspondantes sur le flanc de l'aile du pignon, on verra que, près de la ligne des centres, la partie du flanc est à peu près égale à la partie correspondante du profil de la dent : le glissement est donc faible. Mais la différence entre la portion de l'excédent de la dent et la portion correspondante du flanc de l'aile augmente au fur et à mesure que le contact s'éloigne de la ligne des centres.

Il est donc désavantageux d'augmenter la menée avant ou après la ligne des centres ; il vaut mieux choisir pour les roues et les pignons les plus grands nombres de dents compatibles avec la solidité de celles-ci.

Les variations du glissement sont parfois considérables ; il peut être sept à huit fois plus grand dans le dernier quart de la menée que dans le premier. Pour comparer la valeur de deux profils, il convient d'examiner comment ils se comportent quant au glissement.

**Écarts et tolérances.** — Bon gré mal gré, on en est réduit à se contenter de profils à peu près exacts. Dans la fabrication, on cherche à obtenir des résultats qui, s'ils ne sont pas toujours les mêmes d'une pièce à l'autre, ne s'écartent cependant pas trop d'une bonne moyenne ; d'autre part, on veut avoir des pièces interchangeables. Ces deux résultats ne sont possibles que si l'on ne tolère, pour les dimensions des pièces, que des écarts très petits, d'autant plus petits que la fabrication est soignée. Cela exige des machines précises, en bon état, bien desservies et un contrôle rigoureux des pièces fabriquées.

Voici, exprimés en millimètres, quelques écarts tolérés dans la fabrication des roues dentées et des pignons ; pour la distance des centres :

+ 0,01

— 0,01

pour le diamètre total des roues :

+ 0,02

— 0,00

pour le diamètre total des pignons :

+ 0,00

— 0,02

Dans les pièces soignées, les écarts sont encore plus faibles. On se souviendra que la tolérance est la somme des écarts en valeurs absolues ; pour la distance des centres, la tolérance est donc 0,02 mm.

**La normalisation.** — La normalisation horlogère suisse a contribué à mettre un peu d'ordre dans la fabrication des roues dentées.

Pour réduire le nombre excessif des roues et des pignons, elle a établi une série de 49 modules (feuille NHS, 56 701) de 0,08 à 0,50 mm, suffisante



pour tous les cas qui se présentent dans la fabrication horlogère courante.

La Commission suisse de normalisation recommande de faire les profils des roues d'après la feuille NHS, 56 702 ; les profils des saillies des dents ne sont pas des arcs d'épicycloïde, mais des arcs de circonférence ; les flancs sont rectilignes. Ces profils donnent des résultats satisfaisants quant à la transmission de l'énergie ; d'autre part ils sont faciles à exécuter puisque les fraises sont taillées suivant des arcs de circonférence de rayon  $\varrho$ . La feuille 56 702 donne les facteurs  $f$  de la formule :

$$D = m(z + f)$$

pour les dentures épicycloïdales théoriques, et le facteur :

$$f_c = 0,95 f,$$

applicable aux roues à dentures corrigées avec profils en arcs de circonférence.

Pour ces dernières roues, il faut utiliser la formule :

$$D = m(z + f_c).$$

Les facteurs  $f$  et  $f_c$  multipliés par le module  $m$  donnent le double de la hauteur de la saillie de la dent.

Les facteurs  $f$  et  $f_c$  ainsi que  $\varrho$  dépendent des nombres de dents de la roue et du pignon ou du nombre des dents du pignon et du rapport d'engrenage. Les trois valeurs mentionnées sont indiquées pour les pignons de 6 à 16 ailes et les rapports d'engrenage 5, 6, 7, 8 et 10.

Nous avons déjà mentionné les différentes formes adoptées pour les excédents des pignons ; la Commission suisse de normalisation en a retenu trois qui sont faciles à réaliser dans la pratique. La feuille NHS, 56 703 indique les caractéristiques des profils que nous avons décrits précédemment : profil *A* (demi-circulaire) ; profil *B* (ogive réduite normalisée) ; profil *C* (ogive normalisée) ; elle donne les formules permettant de calculer le rayon  $\varrho'$  des arcs de circonférence formant les saillies ainsi que les valeurs, exprimées en fonction du module, des doubles saillies, valeurs qui facilitent le calcul des diamètres totaux des pignons.

A côté des normes de la Commission suisse de normalisation, nous disposons depuis peu des normes, désignées par EVJ, élaborées par M. Vuilleumier, directeur de l'Ecole professionnelle de la Vallée de Joux.

Les profils recommandés par M. Vuilleumier sont aussi formés par des arcs de circonférence ; l'avantage de ces nouveaux profils réside dans le fait qu'une fraise suffit pour tailler toutes les roues de plus de 40 dents ayant le même module. La transmission de l'énergie semble se faire de manière aussi bonne qu'avec les roues dentées taillées d'après les normes NHS.

Pour juger de la valeur d'un système de formation des profils, il ne suffit pas de tenir compte de la transmission de l'énergie ; il faut apprécier

cier l'influence sur cette transmission de certains défauts tels que inexactitude de la distance des centres, des diamètres totaux et des jeux trop petits ou trop grands. Tout système de normalisation des engrenages doit être jugé d'après les critères suivants : 1<sup>o</sup> transmission régulière de l'énergie, 2<sup>o</sup> importance du glissement, 3<sup>o</sup> facilité d'exécution des roues dentées, 4<sup>o</sup> influence des défauts de fabrication sur la transmission de l'énergie.

Suivant la qualité de la montre, l'un ou l'autre de ces critères a une importance prépondérante. Ainsi, pour un chronomètre, le premier critère est plus important que le troisième.

**Engrenages spéciaux.** — Nous avons surtout envisagé les roues de ce que les horlogers appellent simplement le rouage (rouage de temps et rouage compteur qu'à l'atelier on appelle rouage de finissage), c'est-à-dire l'ensemble des roues et des pignons chargés de transmettre l'énergie du ressort moteur à l'échappement. Mais dans les montres et les horloges, il y a d'autres roues dentées dont nous parlerons.

Les roues du rouage ont un mouvement saccadé et tournent toujours dans le même sens, abstraction faite du très petit recul provoqué par le dégagement de la roue d'échappement.

Nous allons examiner quelques cas où le mouvement peut avoir lieu dans les deux sens ou uniquement dans un sens, mais où la régularité de la transmission de l'énergie ne joue aucun rôle.

**Les roues de la minuterie et de la mise à l'heure.** — Ce rouage spécial se compose de la chaussée  $C$  engrenant dans la roue de minuterie  $M_1$  qui porte le pignon de minuterie  $M_2$ , lequel entraîne la roue des heures  $H$  (fig. 162). Le sens de rotation de ces roues est indiqué par les flèches 1.

La roue  $M_1$  engrène aussi dans le renvoi  $R_1$  qui engrène soit dans un second renvoi, soit directement dans le pignon baladeur (pignon coulant).

Pour mettre les aiguilles à l'heure, on actionne, au moyen de la tige de remontoir, le pignon coulant, le ou les renvois, la roue de minuterie et toutes les roues de la minuterie. Le mouvement peut avoir lieu dans un sens ou dans l'autre.

Ici, certaines roues (la roue de minuterie et parfois l'un des renvois) engrenent dans deux autres roues, ce qui n'arrive jamais dans le rouage compteur.

Pour que les engrenages restent corrects, il faut que les profils épicycloïdaux soient engendrés par les mêmes cercles générateurs.

Si la circonférence du cercle générateur de centre  $O'_3$  a pour diamètre le rayon de la circonférence du cercle primitif de la roue  $O_3$ , les flancs internes de  $O_3$  seront des surfaces planes (fig. 163). Les profils des dents

des roues  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$  seront construits avec le même cercle générateur. Seuls, les profils des flancs intérieurs de la roue  $O_3$  seront droits ; ceux des autres roues seront des arcs d'hypocycloïde. On utilise pour toutes les roues des profils internes rectilignes ; ils ne sont pas conformes à la théorie

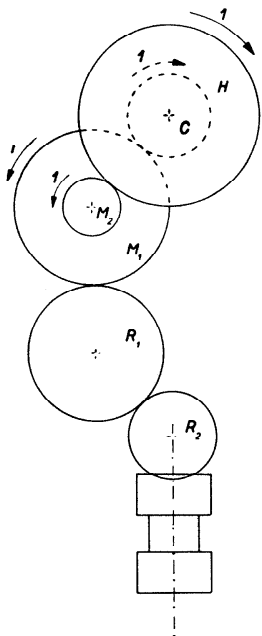


Fig. 162

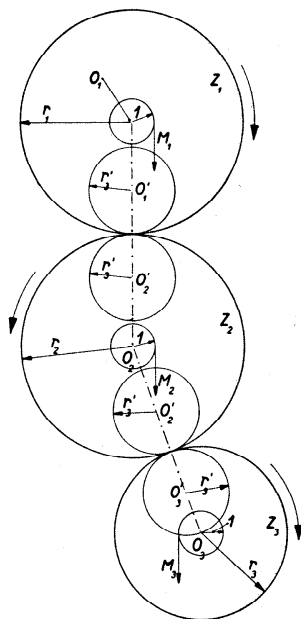


Fig. 163

mais, à cause du frottement, les profils hypocycloïdaux n'assurent pas non plus une transmission régulière de l'énergie. Dans le cas de la mise à l'heure, la régularité de cette transmission a peu d'importance. Pour la même raison, on remplace, dans les flancs externes, les arcs d'épicycloïde par des arcs de circonférence.

Dans les engrenages de minuterie et de mise à l'heure, on peut réduire le jeu ; on admet généralement :

$$j = \frac{p}{15} = \frac{\pi m}{15} = 0,21 m.$$

Le jeu est réparti également sur les deux roues dont les dents ont la même largeur  $l$ . On a :

$$p = j + 2l,$$

$$l = \frac{p - j}{2} = \frac{7p}{15} = \frac{7}{15} \pi m = 1,47 m.$$

Quand il s'agit de renvois, le rapport des vitesses des mobiles extrêmes (renvoi  $R_2$  — roue de minuterie  $M_1$  de la figure 162) est le même que si les roues intermédiaires n'existaient pas.

Qu'en est-il des moments de force? Si l'on considère (fig. 163) une transmission idéale de  $O_1$  à  $O_3$  à travers la roue  $O_2$  et qu'on appelle  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  les moments des forces agissant sur ces roues à l'instant où se produit l'équilibre, on a, pour l'engrenage  $O_1 - O_2$ :

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

et, pour l'engrenage  $O_2 - O_3$ :

$$\frac{M_2}{M_3} = \frac{r_2}{r_3} = \frac{z_2}{z_3},$$

d'où :

$$\frac{M_1}{M_3} = \frac{r_1}{r_3} = \frac{z_1}{z_3}.$$

*Le rapport des moments de force agissant sur les roues extrêmes est indépendant des roues intermédiaires.*

**Les roues de la minuterie et le module.** — Appelons  $z_1, z_2, z_3, z_4$ ;  $r_1, r_2, r_3, r_4$  les nombres de dents et les rayons primitifs de la chaussée, de la roue et du pignon de minuterie, et de la roue des heures. Les distances des centres chaussée-minuterie et minuterie-roue des heures sont égales :

$$r_1 + r_2 = r_3 + r_4$$

ou

$$d_1 + d_2 = d_3 + d_4.$$

Si  $m_1$  est le module du premier engrenage et  $m_2$  celui du second, nous avons :

$$m_1(z_1 + z_2) = m_2(z_3 + z_4),$$

soit :

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{z_3 + z_4}{z_1 + z_2}.$$

Si nous désirons avoir un module unique, c'est-à-dire :

$$m_1 = m_2,$$

nous aurons aussi :

$$z_1 + z_2 = z_3 + z_4.$$

D'autre part le rapport des vitesses de la chaussée et de la roue des heures doit être égal à 12 :

$$\frac{z_2}{z_1} \cdot \frac{z_4}{z_3} = 12.$$

Appelons  $p$  et  $q$  les deux rapports d'engrenage :

$$p = \frac{z_2}{z_1}, \quad q = \frac{z_4}{z_3}.$$

Nous avons  $pq = 12$ , d'où  $p = \frac{12}{q}$  et  $q = \frac{12}{p}$ . En choisissant  $p$ , nous déterminons  $q$ ; nous aurons par exemple :

| $p$ | $q$ |
|-----|-----|
| 2   | 6   |
| 3   | 4   |
| 4   | 3   |
| 5   | 2,4 |
| 6   | 2   |

Admettons la paire de valeurs  $p = 2, q = 6$ ; dans ce cas :

$$\frac{z_2}{z_1} = 2 \quad \text{ou} \quad z_2 = 2z_1$$

$$\frac{z_4}{z_3} = 6 \quad \text{ou} \quad z_4 = 6z_3.$$

$z_1 + z_2 = z_3 + z_4$  devient  $3z_1 = 7z_3$ , d'où :

$$z_1 = \frac{7}{3}z_3 = 2z_3 + \frac{z_3}{3}.$$

Posons  $\frac{z_3}{3} = t$ ; nous obtiendrons :

$$z_3 = 3t, \quad z_1 = 7t.$$

Mais  $\frac{z_2}{z_1} = 2$ , donc  $z_2 = 2z_1 = 14t$ ; d'autre part  $\frac{z_4}{z_3} = 6$ , donc  $z_4 = 6z_3 = 18t$ .

En donnant à  $t$  des valeurs entières, nous obtenons les nombres de dents suivants :

|         |    |    |    |    |
|---------|----|----|----|----|
| $t$ :   | 1  | 2  | 3  | 4  |
| $z_1$ : | 7  | 14 | 21 | 28 |
| $z_2$ : | 14 | 28 | 42 | 56 |
| $z_3$ : | 3  | 6  | 9  | 12 |
| $z_4$ : | 18 | 36 | 54 | 72 |

Ces nombres ne sont pas très pratiques.

Admettons  $p = 3$  et  $q = 4$ . Nous trouverons par le même procédé :

$$\text{pour } t = 2: \quad z_1 = 5t, \quad z_2 = 15t, \quad z_3 = 4t, \quad z_4 = 16t;$$

$$\text{pour } t = 3: \quad z_1 = 10, \quad z_2 = 30, \quad z_3 = 8, \quad z_4 = 32;$$

$$z_1 = 15, \quad z_2 = 45, \quad z_3 = 12, \quad z_4 = 48.$$

Renonçons à l'égalité des modules et choisissons le rapport  $\frac{m_1}{m_2}$ .

Supposons  $\frac{m_1}{m_2} = \frac{5}{4}$ . Nous aurons :

$$\frac{z_3 + z_4}{z_1 + z_2} = \frac{5}{4},$$

soit :

$$4(z_3 + z_4) = 5(z_1 + z_2).$$

Admettons  $p = 3$  et  $q = 4$ ; nous aurons :

$$z_2 = 3z_1, \quad z_4 = 4z_3$$

et

$$4(z_3 + 4z_3) = 5(z_1 + 3z_1),$$

d'où :

$$z_3 = z_1.$$

Choisissons  $z_1 = 8$ ; nous trouvons :

$$z_1 = 8, \quad z_2 = 24, \quad z_3 = 8, \quad z_4 = 32.$$

Pour  $z_1 = 10$ , nous aurions :

$$z_1 = 10, \quad z_2 = 30, \quad z_3 = 10, \quad z_4 = 40.$$

Si  $z_1 = 12$ , nous aurions :

$$z_1 = 12, \quad z_2 = 36, \quad z_3 = 12, \quad z_4 = 48.$$

**La crémaillère.** — Un segment rectiligne peut être muni de dents et engrener dans une roue. C'est, en somme, un engrenage extérieur ou intérieur dans lequel le rayon de la circonférence primitive d'une des roues est infini. Le segment rectiligne — la crémaillère — a un mouvement de translation.

Soit la circonférence primitive de la roue  $O_1$  de  $z_1$  dents et de rayon  $r_1$ . La droite  $TT$  tangente en  $A$  (fig. 164) à la circonférence primitive  $O_1$  peut être considérée comme la circonférence primitive de la crémaillère.

Faisons rouler un cercle de centre  $O'_1$  et de rayon  $r'_1 = \frac{r_1}{2}$  sur la droite  $TT$  et à l'intérieur de la circonférence  $O_1$ . Le point  $A$  de la circonférence

$O'_1$  décrit la cycloïde  $ABC$  dont un arc  $AS$  formera la moitié de la saillie de la dent de la crémaillère, tandis que le flanc interne de la roue aura  $AO_1$  comme profil.

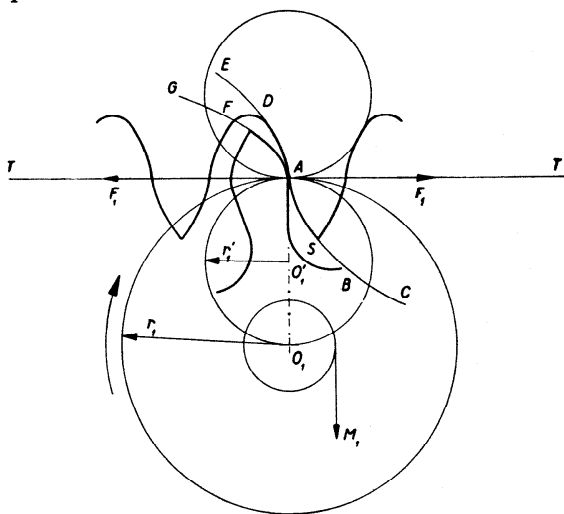


Fig. 164

Faisons rouler le même cercle de l'autre côté de la droite  $TT$  et à l'extérieur du cercle  $O_1$  : le point  $A$  décrira une cycloïde  $ADE$  et une épicycloïde  $AFG$ , qui fourniront le flanc interne de la dent de la crémaillère et la saillie de la dent de la roue  $O_1$ .

Nous déterminerons les dentures en tenant compte du jeu et de l'égalité des pas des deux mobiles :

$$p = \frac{2\pi r_1}{z_1} = \frac{\pi d_1}{z_1} = \pi m, \quad m = \frac{d_1}{z_1}.$$

Supposons qu'un poids  $M_1$  attaché à une poulie de rayon 1 actionne la roue  $O_1$  dans le sens de la flèche ; il suscite une force  $-F_1$  qui provoque la translation de la crémaillère.

Abstraction faite du frottement des dents, des pivots et des coulisses qui guident la crémaillère, nous avons :

$$F_1 = \frac{M_1}{r_1}.$$

Si, inversement, la crémaillère actionne la roue, la force  $F_1$  de translation est motrice ; abstraction faite des résistances passives, l'équilibre est alors réalisé si :

$$M_1 = F_1 r_1.$$

La prise en considération des frottements autorise à remplacer les profils théoriques par des profils plus facilement réalisables en pratique.

**L'engrenage du rochet et de la couronne.** — Ces deux roues n'ont qu'à transmettre la force musculaire de celui qui remonte la montre à l'arbre du barillet en vue de tendre le ressort moteur.

Le rapport d'engrenage influence la durée du remontage; cette opération sera d'autant plus longue que le rapport couronne rochet sera plus petit. Augmenter ce rapport, c'est diminuer la durée du remontage pour lequel il faudra déployer une plus grande force musculaire.

Il faut choisir le rapport d'engrenage de façon que le remontage soit doux, mais ne dure pas trop longtemps.

Le mécanisme du remontage se compose du pignon de remontoir, de la couronne qui a souvent deux dentures dont une « de champ » et du rochet. Soient  $z_1, z_2, z_3, z_4$  les nombres de dents (fig. 165);  $n_1$  le

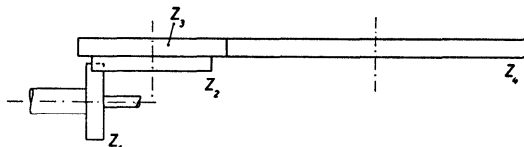


Fig. 165

nombre de tours de la tige ou du pignon de remontoir dans un certain intervalle de temps,  $n_2$  et  $n_3$  les nombres de tours de la couronne et du rochet pendant le même temps. On a :

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1}, \quad \frac{n_2}{n_3} = \frac{z_4}{z_3},$$

d'où :

$$\frac{n_1}{n_3} = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Pour que le rochet fasse un tour ( $n_3 = 1$ ), la tige de remontoir doit en faire :

$$n_1 = \frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

On peut modifier les nombres de dents suivant les dimensions (diamètre et hauteur) du mouvement. Si la montre a un ressort moteur très fort, il y a intérêt à augmenter  $z_2$  et  $z_4$  et à diminuer  $z_1$  et  $z_3$ .

La transmission de l'énergie d'un arbre à l'autre n'a pas besoin d'être régulière comme dans le rouage compteur. Les mobiles du remontoir ne fonctionnent que quelques secondes par jour et leur mouvement n'influence pas la marche de la montre. D'autre part, ils tournent toujours dans le



même sens, de sorte qu'il n'est pas nécessaire que leurs dents soient symétriques par rapport au rayon aboutissant au sommet. On a vu des rochets et des couronnes avec des dents asymétriques comme celles de la figure 166.

Puisque la force à transmettre peut être relativement considérable, les dents doivent être solides. Les mobiles du remontoir sont généralement en acier trempé; leurs dents sont trapues et ont des fonds arrondis; les jeux sont réduits.



Fig. 166

On a normalisé les dentures des rochets et des couronnes; les saillies des dents sont des arcs de circonférence, les flancs internes sont droits et reliés par un arc de circonférence.

On admet généralement :

$$j = \frac{p}{20} = 0,157 m.$$

L'épaisseur  $l$  des dents est la même pour le rochet et pour la couronne :

$$l = \frac{19p}{40} = 1,492 m,$$

puisque le jeu est réparti également sur les deux roues.

#### Les roues coniques. —

A part l'engrenage du pignon de remontoir dans la denture de champ de la couronne, nous n'avons considéré que des roues dentées dont les axes sont parallèles.

Dans l'engrenage habituel appelé *engrenage droit* ou *engrenage cylindrique*, la transmission du mouvement se fait comme si les roues s'entraînaient par le frottement de deux cylindres dont les rayons sont les rayons primitifs.

Si les axes sont concourants, il faut remplacer les cylindres par des cônes décrits autour de ces axes : d'où le nom d'*engrenage conique*.

Soient (fig. 167) deux axes  $OA$  et  $OB$ ; nous supposons que ces axes sont aussi ceux de deux cônes circulaires  $DOC$  et  $COE$  ayant une généra-

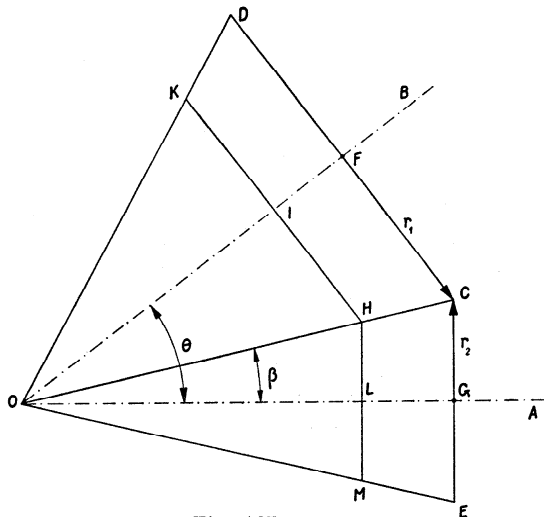


Fig. 167

trice commune  $OC$ . Si l'un des cônes entraîne l'autre par frottement sans glissement, les circonférences  $DC$  et  $CE$  auront toujours un point commun. Pendant que le point de contact se déplace d'un arc  $a_1$  sur  $DC$ , il se déplace de  $a_2$  sur  $CE$ , et

$$a_1 = a_2.$$

Le cône  $DOC$  a tourné d'un angle  $\alpha_1$ , tandis que le cône  $COE$  a tourné de  $\alpha_2$ :

$$a_1 = CF \cdot \alpha_1 = r_1 \alpha_1, \quad a_2 = CG \cdot \alpha_2 = r_2 \alpha_2,$$

d'où :

$$r_1 \alpha_1 = r_2 \alpha_2,$$

soit :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Si les angles  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  ont été décrits dans l'unité de temps, nous avons :

$$\alpha_1 = \omega_1, \quad \alpha_2 = \omega_2,$$

donc :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}.$$

Mais la même relation existe pour n'importe quelles circonférences tracées sur la surface des cônes, pourvu que ces circonférences se touchent.

Ainsi :

$$\frac{HI}{HL} = \frac{\omega_2}{\omega_1},$$

car :

$$\frac{HI}{CF} = \frac{OH}{OC} = \frac{HL}{CG}.$$

Les axes étant donnés, il s'agit de choisir les rayons des cônes de façon que le rapport des vitesses angulaires ait une valeur déterminée.

L'angle  $\theta$  des deux axes est connu ; si  $\beta$  est l'angle du cône  $COE$ , celui du cône  $DOC$  est  $\theta - \beta$ . Nous avons :

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{OC \sin(\theta - \beta)}{OC \sin \beta} = \sin \theta \cotg \beta - \cos \theta,$$

d'où :

$$\cotg \beta = \frac{\frac{\omega_2}{\omega_1} + \cos \theta}{\sin \theta}. \quad (79)$$

Dans le cas le plus fréquent, les axes sont perpendiculaires l'un sur l'autre ; la formule (79) devient :

$$\cotg \beta = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$

ou

$$\tg \beta = \frac{\omega_1}{\omega_2}. \quad (80)$$

Cette formule permet de calculer les angles des cônes que nous pouvons alors dessiner. Faisons  $\angle AOC = \beta$  et prenons sur  $OC$  un point quelconque  $C$  d'où nous abaissons sur les axes des perpendiculaires qui sont les rayons  $r_1$  et  $r_2$  des bases des deux cônes.

En garnissant les surfaces coniques de saillies, nous aurons des roues capables d'engrener l'une avec l'autre si elles ont le même pas  $p$ .

En appelant  $z_1$  et  $z_2$  les nombres de dents des deux roues, nous avons :

$$p = \frac{2\pi r_1}{z_1} = \frac{2\pi r_2}{z_2},$$

d'où :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

La valeur de  $p$  est fonction de  $r_1$  et de  $r_2$ , mais puisque  $r_1$  et  $r_2$  varient tout le long des cônes, le pas circonférentiel d'une roue conique varie le long de la génératrice du cône.

Envisageons le pas angulaire  $p_a$ . Pendant qu'un point de la circonférence de la base du cône a décrit une circonférence de rayon  $r_1$  (fig. 168), une génératrice du cône a décrit un arc de circonférence de rayon  $OC$  et d'angle  $\gamma_1$ , tel que :

$$2\pi r_1 = OC \cdot \gamma_1,$$

d'où :

$$\gamma_1 = 2\pi \sin(\theta - \beta).$$

En divisant cet angle par  $z_1$ , nous aurons le pas angulaire :

$$p_a = \frac{2\pi r_1}{OC \cdot z_1}.$$

Pour l'autre roue, nous aurions :

$$p_a = \frac{2\pi r_2}{OC \cdot z_2}.$$

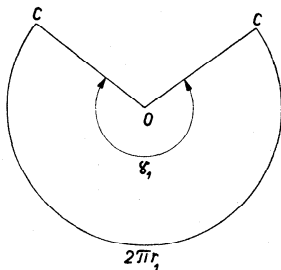


Fig. 168

Comme  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}$ , le pas angulaire est le même sur les deux roues. Il ne varie pas le long de la génératrice, puisque

$$p_a = \frac{2\pi \sin(\theta - \beta)}{z_1} = \frac{2\pi \sin \beta}{z_2}.$$

**Construction d'un engrenage conique.** — Proposons-nous de dessiner les roues d'angle permettant de transmettre l'énergie de l'axe  $OA$  (fig. 169) à l'axe  $OB$  qui lui est perpendiculaire. Nous voulons un rapport bien défini des vitesses angulaires des deux roues ; ce rapport nous permet de calculer l'angle  $\beta$  d'après la formule (80).

Faisons  $BOC = \beta$  et choisissons sur  $OC$  un point  $C$  qui permette de donner aux roues des dimensions convenables. Les cônes  $DOC$  et  $COE$  sont maintenant définis ; les points  $D, C, E$  sont sur une circonférence de centre  $O$ . Les cercles de base  $CFE$  et  $CGD$  sont sur la sphère de centre  $O$  et de rayon  $OD = OC = OE$ . Du point  $H$  sur  $OC$  menons  $HK$  perpendiculaire à  $OB$  et  $HM$  perpendiculaire à  $OA$  ; nous déterminons deux plans perpendiculaires aux axes : ce sont les faces internes des deux roues. Traçons le plan tangent en  $C$  à la sphère de centre  $O$  ; ce plan coupe les axes des roues en  $N$  et  $P$  que nous pouvons considérer comme les sommets des cônes  $CND$  et  $CPE$ . Développons les surfaces latérales de ces cônes ; nous obtenons les secteurs circulaires de centres  $Q$  et  $R$  tels que :

$$\begin{aligned} RA_1 &= PC, QA_1 = NC, \\ RA_1 \cdot \gamma &= 2\pi \cdot CF = 2\pi r_1, \\ QA_1 \cdot \eta &= 2\pi \cdot CG = 2\pi r_2. \end{aligned}$$

Divisons les arcs des secteurs circulaires en  $z_1$  et  $z_2$  parties, nous aurons le pas circonférenciel en  $C$ .

Dessignons en  $A_1$  la dent de la roue comme nous le ferions pour des engrenages droits, puis ramenons la forme dessinée en  $C$ . Nous cherchons la projection de cette figure dans un plan horizontal. Prenons un point  $O_1$ , centre du cercle primitif de la roue d'axe  $OA$  ; le rayon primitif est  $O_1C_1 = CG$ . Le point  $C_1$  représente le milieu  $A_1$  de la dent ; nous reportons à droite et à gauche de  $C_1$  et sur la circonférence de centre  $O_1$  des longueurs égales à la demi-largeur de la dent. Pour obtenir la projection d'un point quelconque du profil — pour la clarté du dessin nous choisirons le sommet  $S$  de la dent — nous projetons  $S$  sur  $NP$  en  $S_1$  ; nous traçons  $OS_1$  que nous prolongeons jusqu'en  $S_2$  sur la droite  $GC$  ; enfin nous ramenons  $S_2$  en  $S_3$  qui se trouve sur le rayon  $O_1C_1$ . Nous pouvons ainsi dessiner autant de points que nous en désirons.

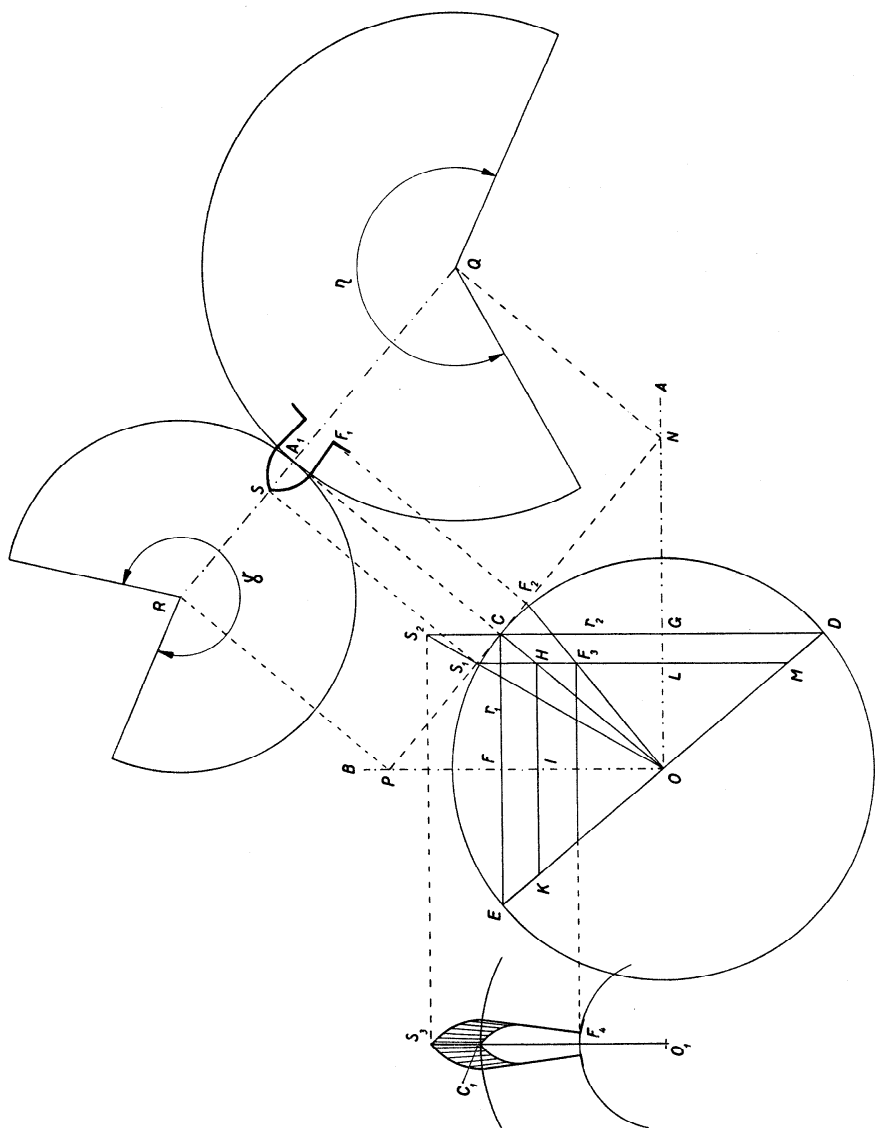


Fig. 169

Pour obtenir l'image de la face intérieure de la dent, envisageons le cercle  $HLM$  au lieu de  $CGD$ . Si nous voulons avoir la figure du point  $F_1$  qui est sur le cercle de base, nous projetons  $F_1$  en  $F_2$  sur  $PN$ ; nous tirons  $OF_2$  et obtenons un point  $F_3$  sur  $HM$ . Ce point  $F_3$  est ramené en  $F_4$  qui détermine le cercle de base de la face intérieure des dents. Les autres points du profil interne sont dessinés par le même procédé.

**L'engrenage à lanterne ou à fuseaux.** — Cet engrenage dont nous avons parlé au sujet de l'application de la méthode des enveloppes est employé dans les réveils et dans certaines pendules. Il est facile à exécuter

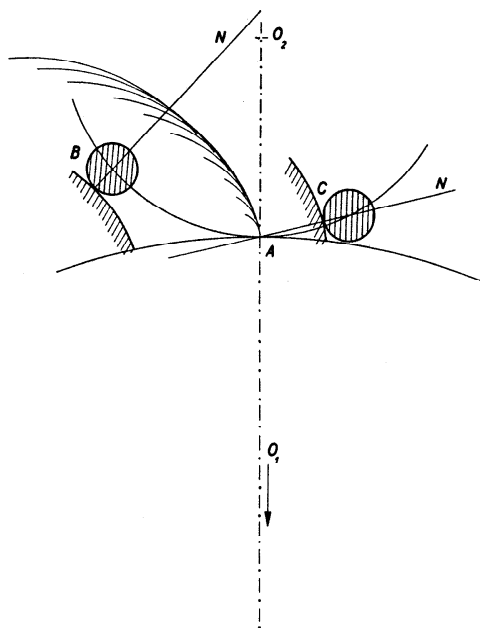


Fig. 170

et, lorsqu'un fuseau est détérioré, son remplacement n'offre aucune difficulté. Ce n'est pas un engrenage réciproque, c'est-à-dire que le pignon ne peut pas conduire la roue. Le premier contact devrait avoir lieu près de la ligne des centres, car un contact d'approche éloigné de la ligne des centres peut créer des situations semblables à celle de la figure 170, où la normale en  $B$  coupe la ligne des centres à l'intérieur de la circonférence primitive du pignon, ce qui est, comme nous le verrons plus tard, le cas typique de l'arc-boutement.

Les contacts après la ligne des centres ne créent pas ces situations anormales. Il convient donc de faire les dents de la roue aussi longues que possible. De toutes façons, elles sont plus longues que les dents des roues épicycloïdales ordinaires, puisque ici c'est le cercle primitif du pignon qui engendre l'épicycloïde et non un cercle de rayon deux fois plus petit.

Le jeu est souvent égal à  $\frac{p}{6}$ ; il est pris uniquement sur le pignon; la largeur de la dent est  $\frac{p}{2}$  et le diamètre  $\delta$  du fuseau est :

$$\delta = p - \frac{p}{2} - \frac{p}{6} = \frac{p}{3}.$$

**L'engrenage à développante.** — Bien que l'engrenage à développante soit peu employé en horlogerie, il est intéressant de le connaître.

La figure qui roule sur une circonférence concentrique à la circonférence primitive de la roue est une droite passant par le point de tangence  $A$

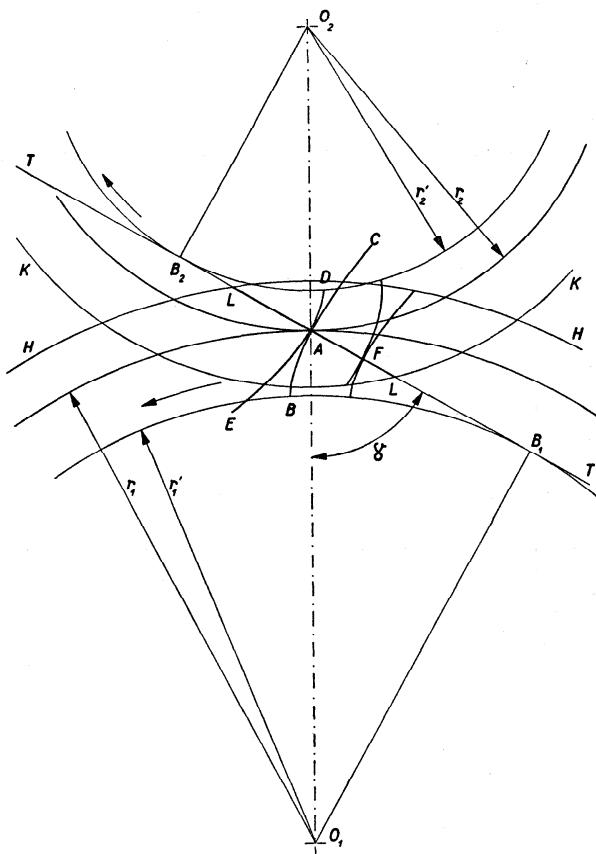


Fig. 171

(fig. 171) des circonférences primitives des deux roues et formant avec la ligne des centres l'angle d'inclinaison  $\gamma$  qui détermine les rayons  $r_1'$  et  $r_2'$  des circonférences développées suivant les formules :

$$r_1' = r_1 \sin \gamma, \quad (81)$$

$$r_2' = r_2 \sin \gamma. \quad (82)$$

En faisant rouler sans glisser la droite  $TT$  sur la circonférence de rayon  $r_1'$ , le point  $A$  décrit un arc de développante  $BAC$ . Si  $TT$  roule sans glisser

sur la circonférence de rayon  $r'_2$ , le point  $A$  décrit l'arc de développante  $DAE$ . Ces deux arcs peuvent être utilisés comme profils des dents des roues  $O_1$  et  $O_2$  dont l'une conduit l'autre.

Si le contact des deux profils se fait en  $F$ , la normale au profil de la dent de  $O_1$  est  $FB_1$ ; la normale au profil de la dent de  $O_2$  est  $FB_2$ . Pour que ce soit une normale commune, il faut que  $F$  soit sur  $B_1B_2$ .

*La ligne d'engrènement dans l'engrenage à développante est une portion de la tangente commune aux circonférences développées.*

La circonférence des sommets  $HH$  de la roue  $O_1$  coupe la ligne d'engrènement en  $L$ ; la circonférence totale  $KK$  de la roue  $O_2$  coupe la même ligne en  $L$ . Le segment  $LL$  est la ligne d'engrènement dont la longueur dépend de la hauteur des saillies.

Lorsqu'on a affaire à des roues très nombrées, ces hauteurs sont très petites; on se contente alors d'une petite portion de l'arc de développante. On fait souvent la hauteur de la saillie égale au module.

L'inclinaison  $\gamma$  étant donnée, la forme des dents de  $O_1$  ne dépend nullement de la roue  $O_2$ . Une roue peut donc engrener avec une autre roue de même module si le profil des dents a été fait avec le même angle d'inclinaison  $\gamma$  de la génératrice.

On admet généralement pour  $\gamma$  une valeur comprise entre  $60$  et  $75^\circ$ .

**Influence de l'angle d'inclinaison de la génératrice.** — Puisque l'angle  $\gamma$  détermine, suivant les formules (81) et (82), les rayons  $r'_1$  et  $r'_2$  des circonférences développées, il détermine aussi les profils.

La longueur maximum de la ligne d'engrènement est :

$$B_1B_2 = (r_1 + r_2) \cos \gamma.$$

Supposons (fig. 172) le point de contact des profils en  $A$ . L'équilibre de la roue est réalisé lorsque :

$$M = Fr'_1 = Fr_1 \sin \gamma,$$

d'où :

$$F = \frac{M}{r_1 \sin \gamma},$$

si nous faisons abstraction du frottement.

Pour un moment moteur donné  $M$ , la pression des dents l'une contre l'autre diminue dès que l'angle d'inclinaison augmente.

Calculons l'angle de conduite maximum  $\theta$  correspondant au rayon total maximum  $O_1B_2$ . Nous avons :

$$\widehat{B_1D} = B_1B_2$$





Dans le triangle rectangle  $O_1 B_1 B_2$ , nous avons :

$$O_1 B_2 = \sqrt{O_1 B_1^2 + B_1 B_2^2},$$

d'où :

$$R_{1\max.} = \sqrt{r_1^2 + 2r_1 r_2 \cos^2 \gamma + r_2^2 \cos^2 \gamma}.$$

Ce rayon maximum n'est généralement pas utilisé, car ou bien il donne un trop grand angle de retraite ou bien la conduite n'est pas répartie également avant et après la ligne des centres. Nous verrons plus loin que le glissement des dents l'une sur l'autre, et partant l'usure, est d'autant plus grand que le contact est plus éloigné de la ligne des centres.

De la formule (83), nous tirons :

$$\cotg \gamma = \frac{\theta}{1 + \frac{z_2}{z_1}}.$$

Imposons à l'angle de conduite la valeur du pas angulaire :

$$\theta = \frac{2\pi}{z_1} \text{ radians,}$$

d'où :

$$\cotg \gamma = \frac{2\pi}{z_1 \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right)} = \frac{2\pi}{z_1 + z_2}. \quad (84)$$

Imposons à  $\gamma$  une autre condition, celle d'égaliser les angles d'approche et de retraite.

Soit  $\alpha$  l'angle de conduite avant la ligne des centres ; c'est, dans le cas de la figure 172, l'angle  $B_1 O_1 E$  :

$$\widehat{\text{arc } B_1 E} = B_1 A,$$

$$r'_1 \alpha = r_1 \cos \gamma,$$

$$r_1 \sin \gamma \cdot \alpha = r_1 \cos \gamma$$

ou

$$\alpha = \cotg \gamma.$$

Si l'angle de conduite  $\alpha$  est égal au demi-pas angulaire, nous avons :

$$\alpha = \frac{\pi}{z_1}, \quad \cotg \gamma = \frac{\pi}{z_1}. \quad (85)$$

Examinons l'angle de conduite  $\beta$  après la ligne des centres ; nous avons :

$$\beta = \sphericalangle EO_1 D, \quad \widehat{\text{arc } ED} = AB_2, \quad r'_1 \beta = r_2 \cos \gamma.$$

Mais  $\frac{r'_1}{r'_2} = \frac{r_1}{r_2}$  et, par conséquent :

$$r'_1 = \frac{r_1 r'_2}{r_2}.$$

D'autre part :

$$r_2 = \frac{r'_2}{\sin \gamma}.$$

Donc :

$$\frac{r_1}{r_2} r'_2 \cdot \beta = \frac{r'_2}{\sin \gamma} \cos \gamma = r'_2 \cotg \gamma.$$

D'où :

$$\beta = \frac{r_2}{r_1} \cotg \gamma$$

et

$$\cotg \gamma = \beta \frac{r_1}{r_2}.$$

Si  $\beta = \frac{\pi}{z_1}$  (demi-pas angulaire), il vient :

$$\cotg \gamma = \frac{\pi}{z_1} \cdot \frac{r_1}{r_2} = \frac{\pi}{z_1} \cdot \frac{z_1}{z_2} = \frac{\pi}{z_2}. \quad (86)$$

Les valeurs de  $\gamma$  données par les formules (84), (85) et (86) ne sont pas identiques ; elles correspondent à des conditions différentes. Ainsi pour un engrenage 60/6, nous avons, d'après l'équation (84) :

$$\gamma = 84^\circ 33' 40'',$$

d'après l'équation (85) :

$$\gamma = 87^\circ 0' 10''$$

et, d'après l'équation (86) :

$$\gamma = 62^\circ 21' 50''.$$

En choisissant  $\gamma$ , il faut éviter deux inconvénients : le contact très éloigné de la ligne des centres et un angle de conduite totale trop petit qui provoque des contacts en dehors de  $B_1 B_2$ .

**L'interférence dans les engrenages à développante.** — Lorsque le rayon total de la roue menante est trop grand, la conduite après la ligne des centres peut être trop grande ; le point de contact des profils risque alors de se trouver en dehors de la ligne d'engrènement, c'est-à-dire



En tenant compte des relations :

$$O_1 O_2 = r_1 + r_2, \quad O_2 B_2 = r_2 \sin \gamma,$$

nous aurons :

$$O_1 B_2 = \sqrt{r_1^2 + 2r_1 r_2 \cos^2 \gamma + r_2^2 \cos^2 \gamma}.$$

Posons  $\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2} = K$ . Nous trouvons :

$$O_1 B_2 = r_2 \sqrt{K^2 + 2K \cos^2 \gamma + \cos^2 \gamma} = \frac{m z_2}{2} \sqrt{K^2 + 2K \cos^2 \gamma + \cos^2 \gamma}.$$

Le rayon total de la roue est :

$$R_1 = \frac{m}{2} (z_1 + f).$$

L'interférence ne se produira pas si  $R_1 \leq O_1 B_2$ . Le cas limite est donné par  $R_1 = O_1 B_2$ , c'est-à-dire :

$$\frac{m}{2} (z_1 + f) = \frac{m z_2}{2} \sqrt{K^2 + 2K \cos^2 \gamma + \cos^2 \gamma},$$

$$z_1 + f = z_2 \sqrt{K^2 + 2K \cos^2 \gamma + \cos^2 \gamma}.$$

Mais  $z_1 = K z_2$ . Donc :

$$z_2 = \frac{f}{\sqrt{K^2 + 2K \cos^2 \gamma + \cos^2 \gamma} - K}.$$

Multiplions le numérateur et le dénominateur de la fraction par

$$\sqrt{K^2 + 2K \cos^2 \gamma + \cos^2 \gamma} + K;$$

nous obtenons finalement :

$$z_2 = \frac{f (K + \sqrt{K^2 + 2K \cos^2 \gamma + \cos^2 \gamma})}{\cos^2 \gamma \cdot (2K + 1)}. \quad (87)$$

Soit un engrenage dont le rapport  $K = 10$ ,  $\gamma = 75^\circ$  et  $f = 2$ ; calculons d'après la formule (87) le nombre de dents  $z_2$  qui permet d'éviter l'interférence. Nous obtenons :

$$z_2 = \frac{2 (10 + \sqrt{100 + 21 \cos^2 \gamma})}{21 \cos^2 \gamma} \cong 28,5.$$

La deuxième roue doit avoir 29 dents; la première, au moins 290.

Un engrenage à développante sans interférence n'est guère possible dans une montre si nous acceptons les conditions imposées. Mais nous pouvons modifier les valeurs de  $f$  et de  $\gamma$ . Faisons, par exemple,  $f = 1$  et  $\gamma = 60^\circ$ . Nous trouverons  $z_2 \cong 4$ . Dans ces conditions, l'engrenage 60/6 n'aurait pas d'interférence.

**Avantages et inconvénients de l'engrenage à développante.** — Dans l'industrie des machines on n'utilise guère que l'engrenage à développante à cause de ses qualités évidentes.

Une roue peut engrener avec n'importe quelle autre roue de même module, si les développantes de cercle ont été engendrées par des génératrices de même inclinaison.

Le cercle développé qui donne naissance au profil des dents de la roue a pour rayon  $r'_1$  :

$$r'_1 = r_1 \sin \gamma.$$

Cette formule ne contient aucun facteur dépendant de la roue conjuguée.

La denture d'une roue à développante est plus solide que la denture d'une roue épicycloïdale de même module parce que les dents sont plus larges à la base. Cet avantage est précieux lorsqu'il s'agit de transmettre une grande force : les horlogers ont parfois utilisé les profils à développante dans les engrenages de remontoir (rochet-couronne) ; on pourrait aussi l'employer dans l'engrenage barillet-pignon des minutes, car il arrive que, lors de la détente brusque du ressort, les dents des roues de cet engrenage soient pliées ou même cassées.

Que se passe-t-il si l'engrenage à développante est faible (distance des centres trop grande) ? La figure 174 représente l'engrenage correct, tandis que la figure 175 représente l'engrenage faible : les profils sont les mêmes dans les deux cas.

On a (fig. 174) :

$$\frac{r'_1}{r'_2} = \frac{r_1}{r_2}.$$

Dans le cas représenté par la figure 175, on a :

$$\frac{r'_1}{r'_2} = \frac{OC}{O'C}.$$

Si l'on pose  $OC = R_1$  et  $O'C = R_2$ , il vient :

$$\frac{r'_1}{r'_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

Mais puisque les profils sont les mêmes que dans le cas précédent, on a

$$\frac{r'_1}{r'_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{R_1}{R_2}.$$

L'engrenage se fait comme si les rayons primitifs étaient  $R_1$  et  $R_2$  et que les circonférences primitives se touchaient en  $C$ .

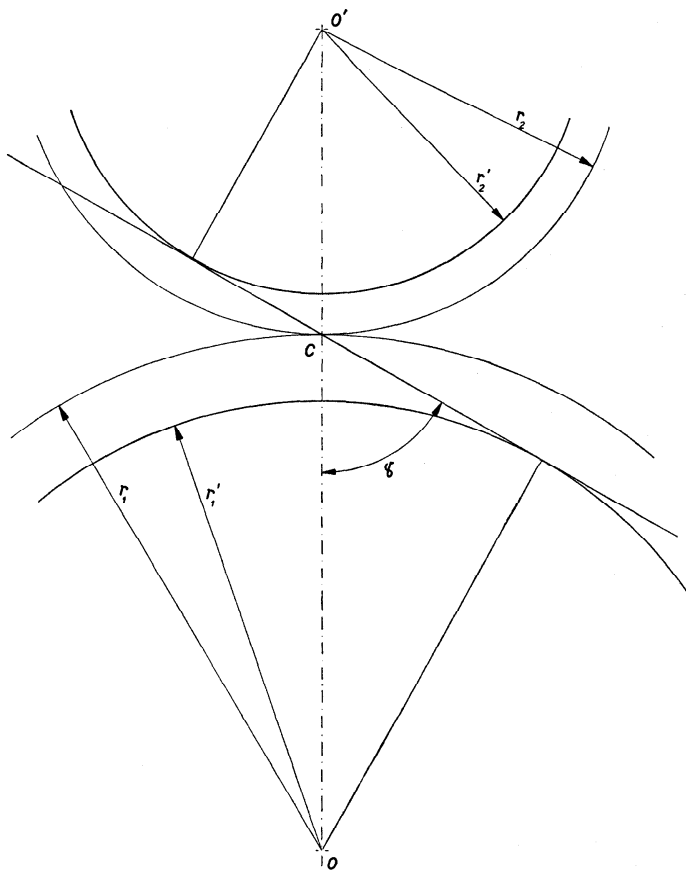


Fig. 174

Mais le rapport des rayons primitifs n'a pas changé ; le rapport des vitesses des deux roues reste le même.

Si malgré ces avantages évidents, les engrenages à développante ne sont que peu employés dans la construction des montres, c'est qu'ils ont des inconvénients qui, supportables dans les engrenages de machines,

ne le sont plus dans les engrenages d'horlogerie, où le rapport d'engrenage est souvent très grand. Un défaut qui ne joue qu'un faible rôle dans un engrenage 120/90 peut bien n'être pas tolérable dans un engrenage 70/7.

Il sied donc d'étudier spécialement les engrenages à fort rapport. S. Guye a fait une étude approfondie de l'engrenage 70/7 avec profils en développante de cercle engendrée par une génératrice inclinée de  $60^\circ$

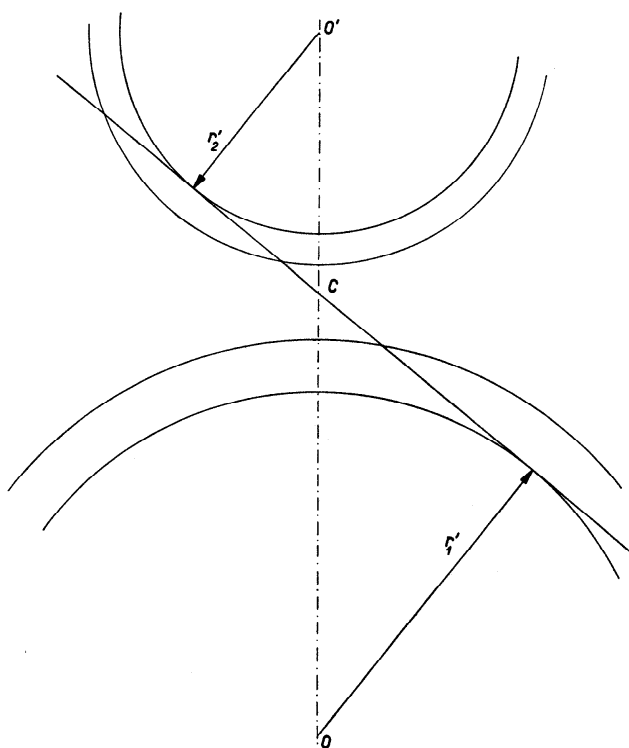


Fig. 175

sur la ligne des centres. Cette étude fait ressortir, à côté de ceux qui ont été signalés, les avantages suivants :

Dans l'engrenage à développante, la menée est mieux répartie avant et après la ligne des centres que dans l'engrenage épicycloïdal. La répartition du roulement et du glissement des dents pendant la menée est aussi plus favorable. Ces avantages sont contrebalancés par les inconvénients suivants : le principal est le danger d'un contact prématuré occasionné par des dimensions inexactes (diamètres des roues, distance des centres), des profils défectueux, des inégalités de pas ou le décentrage d'un des



mobiles. Un tel contact prématuré peut bloquer les roues ; c'est un risque que les horlogers ne veulent pas courir.

L'examen des pressions latérales sur les pivots du pignon a montré que ces pressions sont plus considérables dans l'engrenage à développante que dans l'engrenage épicycloïdal, de sorte que l'avantage du glissement plus faible sur les dents est diminué sinon détruit par l'augmentation de la pression latérale qui augmente le frottement des pivots.

**Le frottement des pivots.** — Parmi les résistances passives qui absorbent une partie de l'énergie à transmettre, mentionnons le frottement des pivots dans les coussinets.

Dans les pièces d'horlogerie, les pivots sont généralement en acier trempé ; ils sont polis. Les coussinets sont souvent en pierre précieuse (rubis naturel ou synthétique, saphir naturel ou synthétique, grenat, etc.). Pivots et coussinets sont graissés ; c'est dire que, comme nous l'avons déjà vu, le coefficient de frottement est une fonction compliquée de la vitesse.

Le mouvement des pivots du rouage est un mouvement saccadé ; à chaque saut, le déplacement angulaire diminue d'un arbre à l'autre, lors du passage de l'échappement au barillet ; la roue d'échappement (de 15 dents) se déplace de  $\frac{360^\circ}{2 \cdot 15} = 12^\circ$  à chaque alternance du balancier, tandis que l'arbre de la roue des minutes ne parcourt dans le même temps qu'un angle de  $1' 12''$ .

Les conditions dans lesquelles se déroule le mouvement des roues et des pivots sont complexes et variées : mouvement rapide de très courte durée (moins de  $10^{-2}$  s) et à vitesse variable, amplitude du mouvement variant d'une roue à l'autre, dans certains cas un mouvement de recul dont la durée est encore plus courte que celle du mouvement d'avance ; pour le balancier au contraire, un mouvement alternatif de grande amplitude ( $\sim 270^\circ$ ), à vitesse variable et sans période de repos appréciable.

Pour aborder par le calcul le frottement des pivots, nous devons simplifier le problème et nous contenter de solutions approximatives. Nous admettons que le frottement est indépendant de la vitesse et nous calculons avec une valeur moyenne du coefficient de frottement ; nous remplaçons le mouvement saccadé par un mouvement continu.

Le calcul du frottement des pivots a pour but de déterminer l'ordre de grandeur de l'énergie absorbée et de permettre de faire des comparaisons du frottement dans différentes positions de la montre.

**Le frottement d'un pivot horizontal.** — Lorsque le pivot est horizontal, il frotte sur le coussinet comme le montre la figure 176.

Dans le cas le plus simple, nous aurons, pour la force  $F$  du frottement :

$$F = P\varphi,$$

où  $P$  désigne la pression du pivot sur le coussinet et  $\varphi$  le coefficient de frottement.

Dans une montre, il doit arriver fréquemment que la portée  $AB$  du pivot frotte contre la face  $CD$  du coussinet ; mais ce frottement est impossible à évaluer parce qu'il est accidentel et que nous ne connaissons pas la force avec laquelle la portée et le coussinet sont pressés l'un contre l'autre. Nous admettons que cette pression est faible, ce qui permet de négliger ce frottement accidentel.

Evaluons l'énergie absorbée par le frottement normal du pivot pendant une rota-

tion complète de ce dernier. Le travail du frottement pendant un tour du pivot de rayon  $r$  est :

$$T = P\varphi \cdot 2\pi r. \quad (88)$$

Dans cette formule la pression  $P$  ne peut être évaluée qu'approximativement ; elle se compose du poids du mobile et de la pression latérale provenant des roues voisines.

Le poids du mobile est supporté par deux pivots ; chaque pivot ne supporte que  $\frac{P}{2}$ . Mais c'est le travail total qui nous importe, c'est-à-dire le travail sur les deux pivots ; nous pouvons donc calculer avec la formule (88) à la condition que les rayons des deux pivots soient égaux. S'ils ne le sont pas, il faut utiliser la formule :

$$T = \frac{P}{2} \varphi \cdot 2\pi (r_1 + r_2) = \pi P \varphi (r_1 + r_2). \quad (89)$$

**Le frottement d'un pivot vertical à portée.** — Dans le cas représenté par la figure 177, nous avons : 1° le frottement de la portée du pivot contre la face de la pierre, 2° le frottement du pivot pressé contre la paroi du trou.

Le premier frottement dépend du poids  $P$  du mobile. Ce poids est supporté par une couronne circulaire dont la surface est :

$$\pi (R^2 - r^2).$$

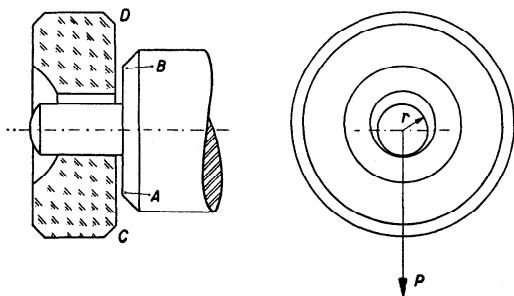


Fig. 176

La pression par unité de surface est :

$$p = \frac{P}{\pi (R^2 - r^2)}.$$

Pour évaluer le travail du frottement pendant un tour du pivot, ne considérons d'abord qu'un élément de la surface de la couronne. L'intégration donnera le travail total.

L'élément  $dS$  de surface est compris entre les deux circonférences de rayon  $\varrho$  et  $\varrho + d\varrho$  et entre deux rayons formant entre eux un angle infiniment petit  $d\theta$  :

$$\begin{aligned} dS &= \frac{\pi [(\varrho + d\varrho)^2 - \varrho^2] d\theta}{2\pi} \\ &= \frac{(2\varrho d\varrho + d\varrho^2) d\theta}{2}. \end{aligned}$$

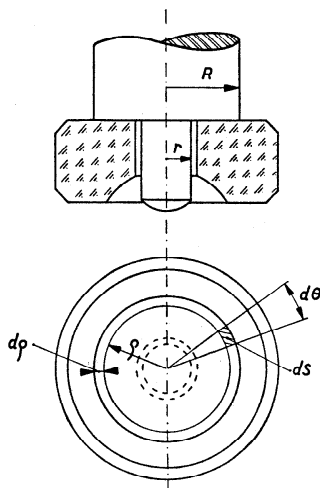


Fig. 177

En négligeant l'infiniment petit du second ordre  $d\varrho^2$ , nous avons :

$$dS = \varrho d\varrho d\theta.$$

Le frottement vaut :

$$p dS \cdot \varphi = \frac{P\varphi}{\pi (R^2 - r^2)} \varrho d\varrho d\theta$$

et le travail élémentaire :

$$dT = \frac{P\varphi}{\pi (R^2 - r^2)} \varrho d\varrho d\theta \cdot 2\pi \varrho,$$

soit :

$$dT = \frac{2P\varphi}{R^2 - r^2} \varrho^2 d\varrho d\theta$$

et, par conséquent :

$$T = \iint \frac{2P\varphi}{R^2 - r^2} \varrho^2 d\varrho d\theta = \frac{2P\varphi}{R^2 - r^2} \int_r^R \varrho^2 d\varrho \int_0^{2\pi} d\theta.$$

En intégrant, il vient :

$$T = \frac{2P\varphi}{R^2 - r^2} \cdot \frac{R^3 - r^3}{3} \cdot 2\pi$$

ou

$$T = \frac{4\pi P\varphi (R^2 + Rr + r^2)}{3(R + r)}. \quad (90)$$

On peut aussi exprimer  $T$  en fonction de la largeur  $l$  et du rayon moyen  $r_m$  de la portée; nous avons :

$$\begin{aligned} l &= R - r, \\ r_m &= \frac{R + r}{2}, \\ R &= r_m + \frac{l}{2}, \\ r &= r_m - \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

En introduisant ces valeurs dans l'équation (90), nous obtenons :

$$T = 2\pi P\varphi \left( r_m + \frac{l^2}{12 r_m} \right). \quad (91)$$

Il est souvent possible de négliger le terme  $\frac{l^2}{12 r_m}$ ; c'est le cas quand ce facteur est petit par rapport à  $r_m$ .

Supposons  $r = 1$ ,  $R = 3$ ,  $l = 2$ ,  $r_m = 2$ ; le terme  $\frac{l^2}{12 r_m}$  est égal à  $\frac{1}{6}$ , c'est dire qu'il est 12 fois plus petit que  $r_m$ .

La formule (91) peut, dans ce cas, être simplifiée; elle devient :

$$T = 2\pi P\varphi \cdot r_m = \pi P\varphi (R + r). \quad (92)$$

Le frottement du pivot contre la paroi du trou peut être plus considérable que celui que nous venons de calculer, car il dépend en outre de la pression latérale, généralement plus grande que le poids du mobile. Nous verrons plus loin la manière de calculer la pression latérale provenant des roues voisines.

**Le frottement d'un pivot vertical sans portée.** — Ce pivot est appuyé sur le contre-pivot par son extrémité (fig. 178). Supposons l'extrémité aplatie de sorte que le frottement se fasse sur un cercle de rayon  $r$ . En utilisant la même méthode que dans le cas précédent, nous trouvons pour le travail du frottement pendant que le pivot exécute un tour :

$$T = \frac{4}{3} \pi P r \varphi.$$

Mais c'est là un cas extrême, puisque l'extrémité est arrondie ainsi que l'indique la figure 179.

L'autre cas extrême est celui d'un pivot terminé en pointe fine ; il n'y aurait aucun travail puisque le chemin parcouru serait nul,  $T = 0$ . La

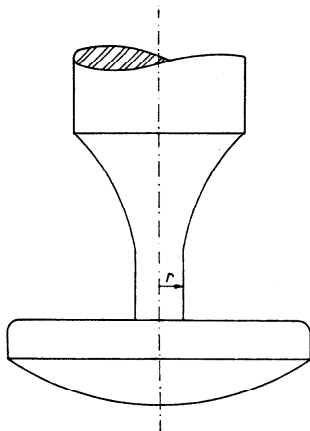


Fig. 178

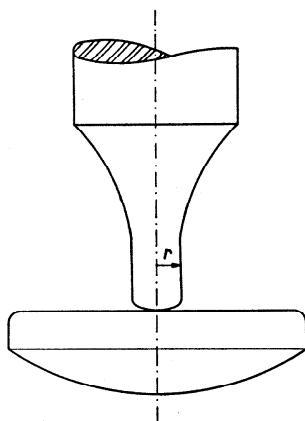


Fig. 179

pointe s'émoussera et bientôt nous aurons un plat qui s'agrandira par l'usure. Pour cette raison nous calculerons le travail en prenant la moyenne entre les deux extrêmes, suivant la formule :

$$T = \frac{2}{3} \pi P r \varphi, \quad (93)$$

ce qui revient à admettre que la surface frottante est un cercle de rayon  $\frac{r}{2}$ .

Constatons que si la pression  $P$  est la même, la perte d'énergie par frottement des pivots du balancier, par exemple, est 3 fois plus considérable lorsque la montre est verticale que lorsqu'elle est horizontale. Le travail du frottement se traduit par une diminution de l'amplitude du balancier lorsque la montre est verticale. Ce phénomène a une répercussion sur la marche de la montre dans les positions horizontale et verticale.

**La pression latérale.** — Cherchons à déterminer la pression latérale exercée par un mobile sur un autre ; cette pression se fait sentir sur les pivots et suscite un frottement, c'est-à-dire une perte d'énergie.

Examinons le cas d'une roue  $O_1$  conduisant une autre roue  $O_2$  (fig. 180) ; supposons que le contact ait lieu sur la ligne des centres. La dent de  $O_1$  exerce sur celle de  $O_2$  une pression  $P_1 = \frac{M_1}{r_1}$ , égale et opposée à la réaction  $P_2$  de la dent de  $O_2$  sur celle de  $O_1$ , lorsque l'équilibre est établi. L'équilibre

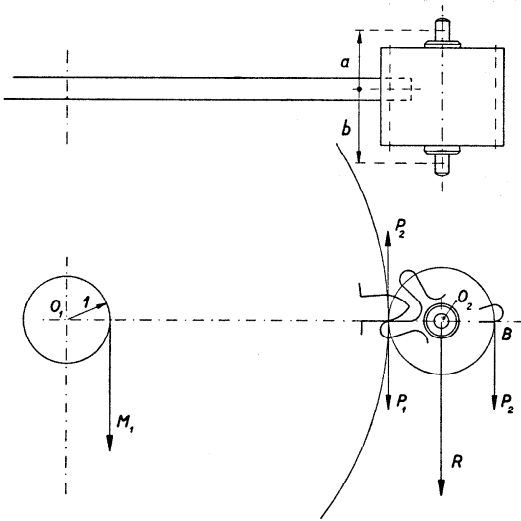


Fig. 180

provoquées par une force  $R = 2P$  agissant sur une barre appuyée en  $A$  et  $B$  (fig. 181).

Les forces  $R$ ,  $R_1$  et  $R_2$  sont en équilibre : la somme algébrique de leurs moments par rapport à un point quelconque du plan est égale à zéro. Par rapport au point  $A$ , l'équation d'équilibre s'écrit :

$$Ra = R_2(a + b)$$

ou

$$R_2 = R \frac{a}{a + b}.$$

Nous trouverions de la même façon :

$$R_1 = R \frac{b}{a + b}.$$

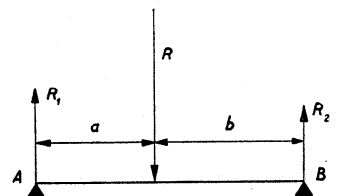


Fig. 181

La pression exercée sur l'un des pivots de  $O_2$  (celui qui est à la distance  $a$  de la roue  $O_1$ ) est :

$$R_1 = 2P \frac{b}{a + b} = \frac{2M_1}{r_1} \cdot \frac{b}{a + b}; \quad (94)$$

celle qui agit sur l'autre pivot est :

$$R_2 = \frac{2M_1}{r_1} \cdot \frac{a}{a + b}. \quad (95)$$

En réalité, le problème est plus compliqué parce que l'arbre de  $O_2$  n'est pas seulement soumis à la pression de la roue  $O_1$ , mais aussi à celle de la roue  $O_3$  (fig. 182).

Sur un des pivots de  $O_2$  agissent les forces  $R$  et  $R'$ ; cette dernière provenant de la roue  $O_3$  est perpendiculaire à  $O_2O_3$ . La résultante de ces

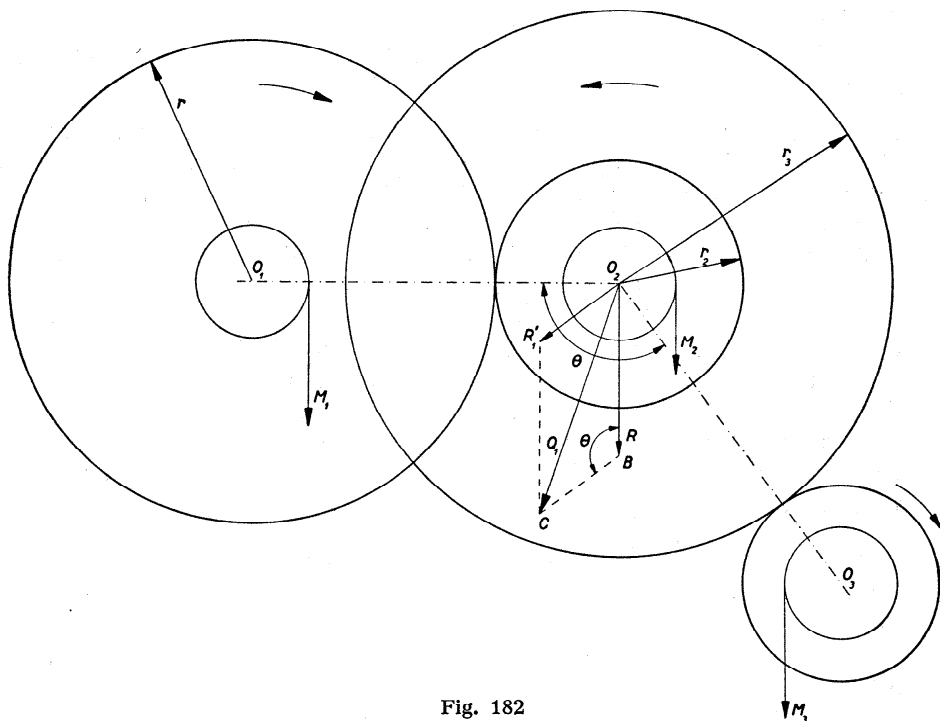


Fig. 182

forces est  $Q_1$ , mais elle est deux fois trop grande parce que, pour établir l'équilibre de la roue  $O_2$ , nous avons ajouté des forces telles que  $P_2$  (fig. 180) qui, en réalité, proviennent de la roue  $O_3$ .

Appelons  $\theta$  l'angle formé par les deux lignes des centres; dans le triangle  $O_2BC$ , nous avons :

$$Q_1 = \sqrt{R^2 + R_1'^2 - 2RR_1' \cos \theta}. \quad (96)$$

La résultante dépend donc de l'angle  $\theta$ ; elle est maximum pour  $\cos \theta = -1$  ou  $\theta = \pi$  radians  $= 180^\circ$ .

Il y a donc intérêt, pour diminuer les pressions latérales, à choisir l'angle  $\theta$  aussi petit que possible.

La formule (96) peut être modifiée en introduisant les nombres des dents  $z_1$  et  $z_2$ , ainsi que les rayons primitifs  $r_1$  et  $r_2$  des roues  $O_1$  et  $O_2$ . Nous obtenons ainsi :

$$P_1 = \frac{M_1}{r_1} = R, \quad R'_1 = \frac{M_2}{r_3} = M_1 \frac{z_2}{z_1} \frac{1}{r_3},$$

d'où :

$$Q_1 = P_1 \left[ \frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_3^2} \left( \frac{z_2}{z_1} \right)^2 - \frac{2}{r_1 r_3} \frac{z_2}{z_1} \cos \theta \right], \quad (97)$$

formule dans laquelle se manifeste l'influence des rayons primitifs. Pour obtenir la résultante des pressions sur chacun des pivots, il faut d'abord calculer les pressions partielles d'après les formules (96) et (97).

Les composantes sur les deux pivots ne sont en général pas égales ; il s'ensuit que la pression latérale résultante n'a ni la même intensité ni la même direction pour les deux pivots.

Nous avons traité le cas où les contacts ont lieu sur la ligne des centres. S'ils ont lieu en dehors de cette ligne, les pressions n'ont plus les mêmes valeurs ; elles sont obliques par rapport à la ligne des centres et leurs bras de levier varient avec l'obliquité.

Les pressions latérales varient, d'instant en instant, en intensité et en direction, mais les variations restent dans certaines limites assez restreintes.

**Le rendement dans les engrenages.** — Le rendement d'une machine est le rapport entre l'énergie produite par la machine et l'énergie motrice dépensée pendant le même temps pour faire marcher la machine.

Dans un engrenage, le rendement est le rapport du travail transmis à la roue menée au travail de la force agissant sur la roue menante.

Puisqu'il y a toujours des résistances passives qui absorbent une partie de l'énergie, le travail moteur  $W_m$  est toujours plus grand que le travail utile  $W_u$  et, si  $R$  désigne le travail des résistances passives, nous aurons :

$$W_m = W_u + R.$$

Le rendement  $\eta$  est défini par l'équation :

$$\eta = \frac{W_u}{W_m} = \frac{W_m - R}{W_m} = 1 - \frac{R}{W_m}. \quad (98)$$

C'est un nombre qui est toujours plus petit que 1 ; il peut être exprimé en pour-cent, en multipliant le nombre  $\eta$  par 100. Ainsi un rendement  $\eta = 0,93$  est aussi un rendement de 93 %. Les valeurs





**Le rendement de l'engrenage épicycloïdal à flanes droits.** — Etudions ce cas particulier si fréquent en horlogerie. Tandis que la dent de la roue  $O_1$  (fig. 183) conduit l'aile du pignon  $O_2$ , l'une des surfaces de contact roule et glisse sur l'autre ; ce mouvement produit des frottements de roulement et de glissement, mais le premier est si faible que nous ne tiendrons compte que du second.

Les roues  $O_1$  et  $O_2$  ont des profils épicycloïdaux théoriques. Considérons deux points de contact très rapprochés  $B$  et  $C$ , situés naturellement sur la circonférence génératrice de centre  $O'_2$ . Posons  $\sphericalangle AO'_2B = \beta$ . L'angle dont le pignon a tourné depuis que le contact était sur la ligne des centres en  $A$  est :

$$\sphericalangle AO'_2B = \frac{\beta}{2} = \gamma.$$

Si  $\sphericalangle BO'_2C = d\beta$ , nous avons :

$$\text{arc } \widehat{BC} = r'_2 d\beta = \frac{r_2}{2} d\beta.$$

La longueur d'un arc d'épicycloïde est, d'après la formule (43) :

$$l_1 = 4r'_2 \left( 1 + \frac{r'_2}{r_1} \right) \left( 1 - \cos \frac{\beta}{2} \right)$$

ou

$$l_1 = 2r_2 \left( 1 + \frac{r_2}{2r_1} \right) \left( 1 - \cos \gamma \right).$$

Différentions :

$$dl_1 = 2r_2 \left( 1 + \frac{r_2}{2r_1} \right) \sin \gamma d\gamma.$$

Ramenons  $C$  par un arc de cercle de centre  $O_2$  sur  $O_2B$  ; nous obtenons un point  $D$  et un triangle  $BCD$  que nous pouvons considérer comme un triangle rectangle.  $BD$  est la distance  $dl_2$  parcourue par le point de contact sur le flanc de l'aile :

$$dl_2 = BD = \sqrt{BC^2 - CD^2}.$$

Mais :

$$BC = r'_2 d\beta = \frac{r_2}{2} d\beta = r_2 d\gamma, \quad CD = r_2 \cos \gamma d\gamma.$$

Donc :

$$dl_2 = r_2 \sin \gamma d\gamma.$$

Le glissement se fait sur une longueur égale à la différence de  $dl_1$  et  $dl_2$  :

$$\begin{aligned} dl_1 - dl_2 &= 2r_2 \left( 1 + \frac{r_2}{2r_1} \right) \sin \gamma \, d\gamma - r_2 \sin \gamma \, d\gamma \\ &= r_2 \sin \gamma \, d\gamma \cdot \left( 1 + \frac{r_2}{r_1} \right) = r_2 \sin \gamma \, d\gamma \cdot \left( 1 + \frac{z_2}{z_1} \right). \end{aligned}$$

La pression normale au point de contact a pour valeur :

$$P = \frac{M}{r_1 \cos \gamma},$$

si  $M$  est le couple moteur actionnant la roue  $O_1$ . Le frottement  $F$  est :

$$F = P\varphi = \frac{M\varphi}{r_1 \cos \gamma};$$

le travail élémentaire du frottement a pour expression :

$$\begin{aligned} dW_f &= F (dl_1 - dl_2) \\ &= \frac{M\varphi}{r_1 \cos \gamma} r_2 \sin \gamma \, d\gamma \cdot \left( 1 + \frac{r_2}{r_1} \right) = M\varphi \frac{r_2}{r_1} \left( 1 + \frac{r_2}{r_1} \right) \operatorname{tg} \gamma \, d\gamma. \end{aligned}$$

L'intégration donne :

$$W_f = M\varphi \frac{r_2}{r_1} \left( 1 + \frac{r_2}{r_1} \right) \int_0^{\gamma_1} \operatorname{tg} \gamma \, d\gamma = M\varphi \frac{r_2}{r_1} \left( 1 + \frac{r_2}{r_1} \right) \left( -\ln \cos \gamma_1 \right)$$

ou

$$W_f = M\varphi \frac{z_2}{z_1} \left( 1 + \frac{z_2}{z_1} \right) \left( -\ln \cos \gamma_1 \right).$$

Dans cette formule,  $\gamma_1$  désigne l'angle de conduite du pignon après la ligne des centres et  $\ln$  le logarithme naturel.

Évaluons le travail moteur  $W_m$ . Pour un tour de la roue menante, ce travail vaut :

$$W_m = M \cdot 2\pi,$$

pour un angle  $\delta$  exprimé en radians :

$$W_m = M\delta,$$

pour un angle  $\delta$  exprimé en degrés :

$$W_m = \frac{M \cdot 2\pi}{360} \delta.$$

Mais comme  $\delta = \gamma_1 \frac{z_2}{z_1}$ , nous avons  $W_m = M\gamma_1 \frac{z_2}{z_1}$ . Le rendement  $\eta$  est donc :

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{R}{W_m} = 1 - \frac{W_f}{W_m} \\ &= 1 - \frac{M\varphi \frac{z_2}{z_1} \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right) \left(-\ln \cos \gamma_1\right)}{M\gamma_1 \frac{z_2}{z_1}} = 1 + \frac{\varphi}{\gamma_1} \left(1 + \frac{z_2}{z_1}\right) \ln \cos \gamma_1. \end{aligned} \quad (99)$$

Dans le second membre de cette équation, le second terme est négatif, car  $\cos \gamma_1$  est toujours plus petit que 1. Le rendement  $\eta$  est d'autant plus grand que la valeur absolue du second terme est plus petite. Cette valeur dépend essentiellement de celle de :

$$\frac{\ln \cos \gamma_1}{\gamma_1}.$$

La valeur absolue de cette fraction augmente en même temps que  $\gamma_1$ . Il y a donc intérêt à réduire le plus possible la valeur de l'angle de conduite, par exemple en augmentant le nombre des dents du pignon.

Calculons le rendement d'un engrenage 60/6 après la ligne des centres et pour un angle de conduite égal à  $42^\circ 15' 45''$ . Nous obtenons, en supposant  $\varphi = 0,2$  :

$$\eta = 0,910\ 52.$$

Pour la conduite avant la ligne des centres, nous pouvons utiliser la même formule puisqu'il suffit de considérer le mouvement en sens inverse où le pignon conduit la roue. Mais dans ce cas, il faut remplacer, dans la formule, l'angle  $\gamma$  parcouru par le pignon par l'angle  $\delta$  parcouru par la roue :

$$\delta = \gamma \frac{z_2}{z_1}.$$

Il y a intérêt à calculer le rendement avant et après la ligne des centres, en supposant égaux les arcs d'approche et de retraite. Pour l'engrenage 60/6 et  $\varphi = 0,2$ , et pour l'angle de  $17^\circ 44' 03''$ , nous avons, après la ligne des centres :

$$\eta = 0,9654$$

et, avant la ligne des centres :

$$\eta = 0,9660.$$

La différence est faible ; le rendement serait un peu meilleur avant la ligne des centres. N'oublions pas que le calcul est effectué en supposant les profils corrects, les dimensions et la distance des centres exactes et le jeu des pivots assez réduit pour qu'il ne puisse affecter la transmission de l'énergie.

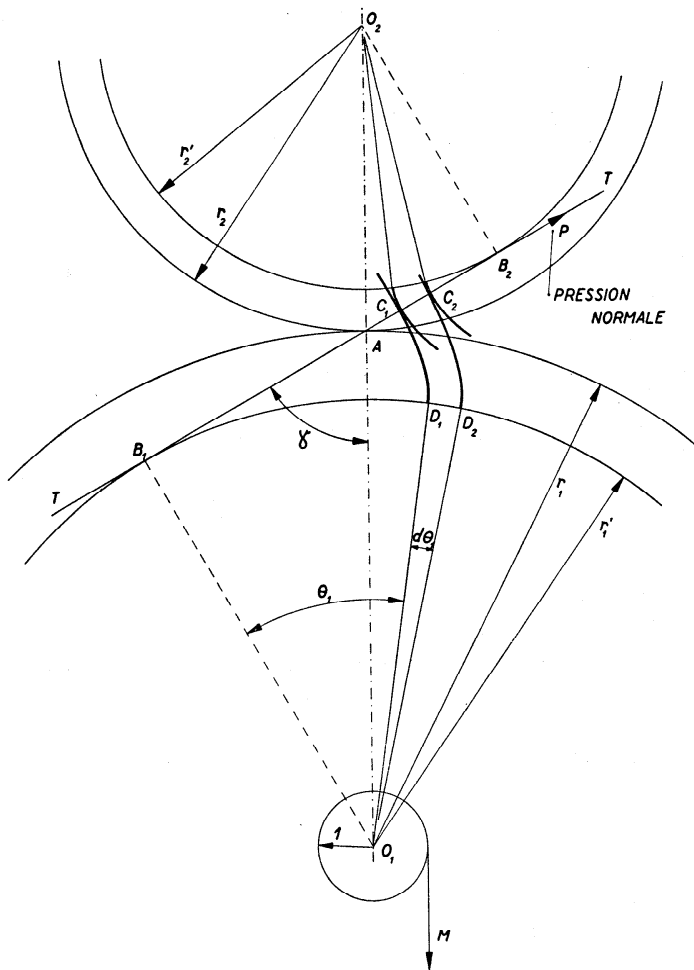


Fig. 184

**Le rendement de l'engrenage à développante.** — Soient (fig. 184) deux roues  $O_1$  et  $O_2$  et la génératrice  $TT$  faisant un angle  $\gamma$  avec la ligne des centres. Examinons ce qui se passe quand  $O_1$  entraînant  $O_2$ , le contact

des dents passe de  $C_1$  en  $C_2$ . Le point de contact se déplace sur les deux profils; la différence entre les chemins parcourus sur l'un et l'autre profils est le glissement que nous allons chercher à évaluer.

La longueur d'un arc de développante est :

$$D_1 C_1 = r_1 \frac{\theta_1^2}{2}.$$

Dans cette formule,  $\theta_1$  est l'angle dont la génératrice a tourné pour engendrer la courbe  $D_1 C_1$ ; c'est aussi l'angle dont la roue a tourné depuis que le contact a eu lieu en  $B_1$  jusqu'à ce qu'il ait passé en  $C_1$  :

$$D_2 C_2 = \frac{r_1}{2} (\theta_1 + d\theta_1)^2,$$

d'où le déplacement du point de contact le long du profil de la dent :

$$D_2 C_2 - D_1 C_1 = dl_1 = r_1 \theta_1 d\theta_1.$$

Nous pouvons calculer de la même façon le déplacement du point de contact sur la dent de  $O_2$ , en tenant compte de l'angle  $\theta_2$  dont a tourné la génératrice pour la roue  $O_2$ . Nous avons :

$$\theta_2 = \frac{z_1}{z_2} \theta_1, \quad d\theta_2 = \frac{z_1}{z_2} d\theta_1,$$

d'où :

$$dl_2 = r_2 \theta_2 d\theta_2 = r_2 \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 \theta_1 d\theta_1 = r_1 \frac{z_1}{z_2} \theta_1 d\theta_1.$$

Le glissement est égal à  $de = dl_1 - dl_2$  ou, dans notre cas, à  $dl_1 + dl_2$ , parce que les premiers points de contact s'éloignent l'un de l'autre :

$$de = dl_1 + dl_2 = r_1 \theta_1 d\theta_1 \cdot \left( 1 + \frac{z_1}{z_2} \right).$$

Nous avons, pour la pression normale :

$$P = \frac{M}{r_1}$$

et, pour le frottement :

$$F = P\varphi = \frac{M\varphi}{r_1}.$$

Le travail élémentaire de  $F$  vaut donc :

$$dW_f = \frac{M\varphi}{r_1} de = M\varphi \theta_1 d\theta_1 \cdot \left( 1 + \frac{z_1}{z_2} \right).$$

En intégrant, il vient :

$$W_f = M\varphi \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \int \theta_1 d\theta_1.$$

Si nous intégrons entre les limites 0 et  $\theta_1$ , nous aurons le travail du frottement depuis le premier contact  $B_1$  jusqu'au contact  $C_1$  :

$$W_f = M\varphi \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{\theta_1^2}{2}.$$

Le travail moteur, pendant le même temps, vaut :

$$W_m = M\theta_1,$$

donc le rendement est :

$$\eta = 1 - \frac{W_f}{W_m} = 1 - \varphi \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{\theta_1}{2}. \quad (100)$$

L'angle  $\gamma$  n'intervient pas dans cette équation ; *l'inclinaison de la génératrice n'a aucune influence sur le rendement.*

Le rendement diminue dès que  $\theta_1$  augmente.

L'angle de conduite est généralement situé de part et d'autre de la ligne des centres. Appelons  $\theta$  l'angle de conduite,  $\theta_1$  et  $\theta_2$  les angles d'approche et de retraite :

$$\theta = \theta_1 + \theta_2.$$

Le travail  $W_f$  se compose de  $W_{1f}$  et de  $W_{2f}$  :

$$W_{1f} = M\varphi \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{\theta_1^2}{2}, \quad W_{2f} = M\varphi \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{\theta_2^2}{2},$$

d'où :

$$W_f = M\varphi \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{2}.$$

Le travail moteur vaut :

$$W_m = M(\theta_1 + \theta_2),$$

d'où :

$$\eta = 1 - \frac{\varphi}{2} \left(1 + \frac{z_1}{z_2}\right) \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{\theta_1 + \theta_2} = 1 - \frac{\varphi}{2} (1 + K) \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{\theta_1 + \theta_2}. \quad (101)$$

Il n'y a aucun intérêt à augmenter démesurément l'angle de conduite  $\theta$  ; il suffit qu'il soit égal au pas angulaire  $p_a$  ou légèrement plus grand que celui-ci. Posons :

$$\theta = p_a = \theta_1 + \theta_2, \quad \theta_2 = p_a - \theta_1,$$

et la fraction  $\frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{\theta_1 + \theta_2}$  devient :

$$\frac{2\theta_1^2 - 2p_a\theta_1 + p_a^2}{p_a};$$

sa valeur augmente ou diminue avec celle du numérateur. Posons :

$$y = 2\theta_1^2 - 2p_a\theta_1 + p_a^2.$$

Nous avons :

$$\frac{dy}{d\theta_1} = 4\theta_1 - 2p_a.$$

Quand cette valeur est nulle, c'est-à-dire quand  $\theta_1 = \frac{p_a}{2}$ , la fonction  $y$

est un maximum ou un minimum. Elle est un minimum, car  $\frac{d^2y}{d\theta_1^2} = 4 > 0$ .

Le rendement de l'engrenage à développante est maximum quand

$$\theta_1 = \theta_2 = \frac{p_a}{2}.$$

*Le rendement de l'engrenage à développante est le meilleur quand la conduite est également répartie avant et après la ligne des centres et quand le rapport d'engrenage  $K = \frac{z_1}{z_2}$  est petit.*

**Détermination expérimentale du rendement d'un engrenage.** — Pour étudier la valeur de certains profils, nous mesurerons, sur des roues agrandies, le moment de force transmis qui est dépendant du frottement des dents entre elles et du frottement des pivots. Pour diminuer ce dernier à tel point qu'il devienne négligeable, nous monterons les roues  $O_1$  et  $O_2$  (fig. 185) sur des roulements à billes. La roue  $O_1$  de rayon primitif  $r_1$  porte une poulie de rayon  $\rho_1$  autour de laquelle s'enroule un fil supportant un poids  $P$ . La roue  $O_2$  de rayon primitif  $r_2$  a une poulie de rayon  $\rho_2$  actionnée par un poids  $p$  suspendu à un fil enroulé autour de la poulie.

Si le contact a lieu en  $A$ , sur la ligne des centres, les roues seront en équilibre si :

$$\frac{P\rho_1}{r_1} = \frac{p\rho_2}{r_2},$$

d'où :

$$p = P \frac{\rho_1}{\rho_2} \frac{r_2}{r_1}. \quad (102)$$



Si le contact a lieu en dehors de la ligne des centres, comme dans la figure 185, nous aurons :

$$\frac{P\varrho_1 \cos \alpha}{r_1} = \frac{p\varrho_2 \cos \alpha}{r_2},$$

soit encore :

$$p = P \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{r_2}{r_1}. \quad (102)$$

La formule (102) a été obtenue en faisant abstraction du frottement des dents et des pivots.

Mais en cherchant à réaliser l'équilibre sur les deux roues, nous voyons que cet équilibre est obtenu en faisant agir sur la poulie de rayon  $\varrho_2$  un poids  $p'$  plus grand que le poids  $p$  calculé d'après la formule (102). La différence  $p' - p$  est une mesure du frottement des dents puisque nous avons rendu négligeable le frottement des pivots.

Évaluons le *rendement instantané*  $\eta_1$  qui est le rendement pendant un temps infiniment petit  $dt$ . Le travail de  $p$ , pendant le temps  $dt$ , est :

$$W_p = p \cdot \varrho_2 \omega_2 dt;$$

celui de  $p'$  vaut :

$$W_{p'} = p' \cdot \varrho_2 \omega_2 dt,$$

si nous désignons par  $\omega_2$  la vitesse angulaire. Le travail absorbé par le frottement est :

$$R = W_f = W_{p'} - W_p = (p' - p) \varrho_2 \omega_2 dt.$$

Pendant le même temps, le poids moteur  $P$  a effectué le travail

$$W_m = P\varrho_1 \omega_1 dt.$$

Nous aurons :

$$\eta_i = 1 - \frac{W_f}{W_m} = 1 - \frac{(p' - p) \varrho_2 \omega_2 dt}{P\varrho_1 \omega_1 dt} = 1 - \frac{p' - p}{P} \frac{\varrho_2 \omega_2}{\varrho_1 \omega_1}.$$

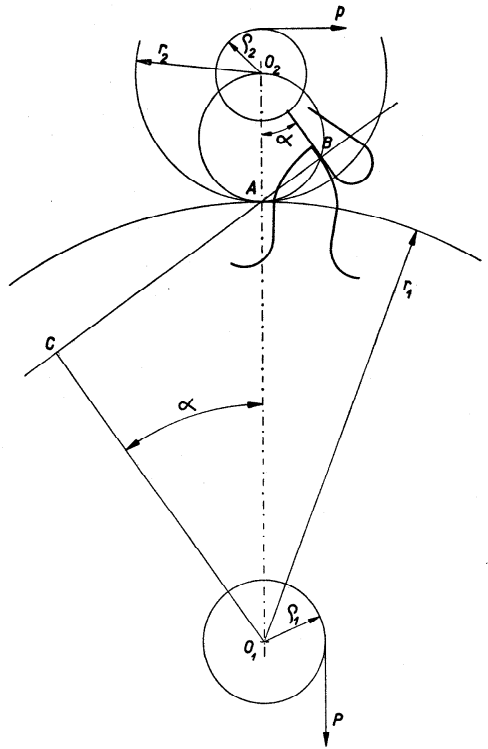


Fig. 185

Mais  $\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2}$ . Donc :

$$\eta_i = 1 - \frac{p' - p}{P \frac{r_1}{r_2} \frac{r_2}{r_1}}.$$

D'après l'équation (102)  $P \frac{r_1}{r_2} \frac{r_2}{r_1} = p$  et, par conséquent :

$$\eta_i = 1 - \frac{p' - p}{p}. \quad (103)$$

Dans l'appareil de M. Vuilleumier, l'équilibre est obtenu par un poids  $p''$  (fig. 186) qui agit sur un levier  $AO_3B$  coudé en  $O_3$ . Le poids  $p''$  est inva-

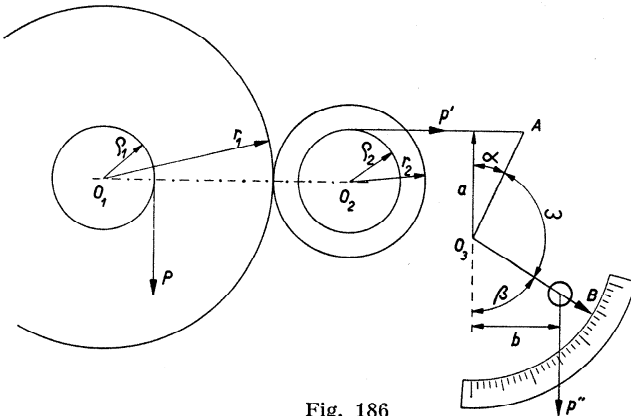


Fig. 186

riable, mais son bras de levier par rapport à  $O_3$  augmente en même temps que la force transmise. Le levier est en équilibre si :

$$p''b = p'a,$$

soit si :

$$p' = p'' \frac{b}{a}.$$

Le rapport  $\frac{b}{a}$  peut être exprimé en fonction de l'angle  $\beta$  que nous pouvons lire sur un cadran divisé en degrés. En effet, en posant :

$$O_3A = l_1, \quad O_3B = l_2,$$

nous avons :

$$a = l_1 \cos \alpha, \quad b = l_2 \sin \beta, \quad \alpha + \beta + \omega = 180^\circ.$$

Posons  $180^\circ - \omega = \varphi$ , ce qui entraîne  $\alpha = \varphi - \beta$ . Pour un appareil donné,  $\varphi$  est une constante. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{b}{a} &= \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos (\varphi - \beta)} \\ &= \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{\sin \beta}{\cos \varphi \cos \beta + \sin \varphi \sin \beta} = \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{1}{\cos \varphi \cotg \beta + \sin \varphi}. \end{aligned}$$

D'où :

$$p' = p'' \cdot \frac{l_2}{l_1} \cdot \frac{1}{\cos \varphi \cotg \beta + \sin \varphi} = \frac{C}{\cos \varphi \cotg \beta + \sin \varphi},$$

si  $C$  désigne la constante de l'appareil,  $C = p'' \cdot \frac{l_2}{l_1}$ .

S'il n'y avait pas de frottement, nous aurions au lieu de  $p'$  une force  $p$  donnée par la formule (102) :

$$p = P \frac{\varrho_1}{\varrho_2} \cdot \frac{r_2}{r_1}.$$

Le rendement instantané serait d'après (103) :

$$\eta_i = 1 - \frac{p' - p}{p}.$$

Pour que les formules que nous venons d'établir soient valables, il faut s'arranger de façon que  $a$  et  $\alpha$  ne varient pas, c'est-à-dire que le brin qui tire sur la poulie de rayon  $\varrho_2$  ait toujours la même direction ; le bras  $O_3A$  doit être long et l'angle  $\alpha$  petit.

**Les défauts dans les engrenages.** — Les défauts des engrenages et en particulier ceux des engrenages d'horlogerie sont nombreux : les profils, les dimensions des roues, la distance des centres, le jeu des pivots, la sûreté radiale peuvent être incorrects, trop grands ou trop petits. Les horlogers contrôlent les qualités d'un engrenage en mettant roue et pignon dans le compas aux engrenages, comme cela a été expliqué.

La plus grande partie des défauts des engrenages se manifestent sous deux formes : l'*arc-boutement* et la *chute*.

Il y a arc-boutement quand le moment de force transmis au pignon ou à la seconde roue est plus faible qu'il ne devrait être. La valeur normale du moment  $M_2$  est :

$$M_2 = M_1 \frac{z_2}{z_1}.$$

Si  $M_2 < M_1 \frac{z_2}{z_1}$ , il y a arc-boutement.

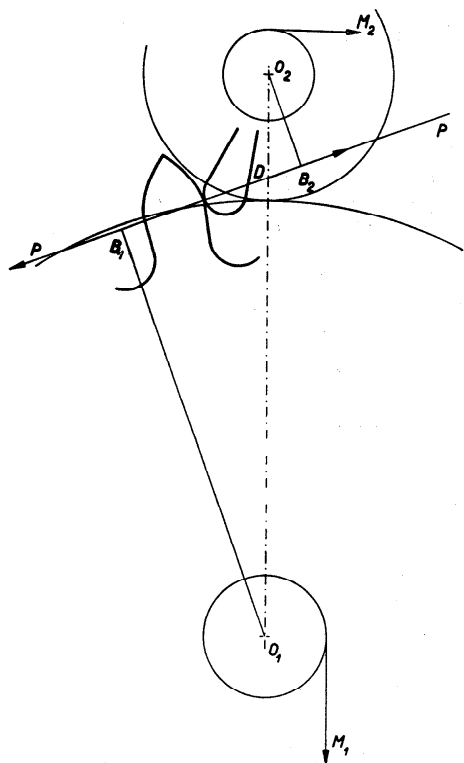


Fig. 187

la distance des centres est plus grande que la somme des rayons primitifs des deux roues ; 3° par un pignon trop gros ou une roue trop petite (fig. 189).

On voit d'emblée le danger que présente l'arc-boutement ; si la normale commune aux surfaces en contact passait tout près de  $O_2$  ou même par  $O_2$ , le moment  $M_2$  serait petit ou nul ; l'énergie serait à peine transmise ; le rouage ne pourrait plus fonctionner ; la montre s'arrêterait.

C'est sans doute la crainte de cette éventualité qui donne l'impression que le frottement « rentrant » est de nature spéciale et

La chute, au contraire, se produit quand :

$$M_2 > M_1 \frac{z_2}{z_1}.$$

L'arc-boutement se produit lors d'un contact défectueux avant la ligne des centres ; la normale au point de contact coupe la ligne des centres à l'intérieur de la circonférence primitive du pignon (fig. 187).

Le rapport des moments  $M_1$  et  $M_2$  est :

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{O_1 D}{O_2 D},$$

$$M_2 = M_1 \frac{O_2 D}{O_1 D}.$$

Mais  $\frac{O_2 D}{O_1 D} < \frac{r_2}{r_1} < \frac{z_2}{z_1}$ , donc :

$$M_2 < M_1 \frac{z_2}{z_1}.$$

L'arc-boutement est produit : 1° par des profils incorrects, en particulier par des dents de la roue trop courtes ; 2° par un engrenage faible (fig. 188), dans lequel

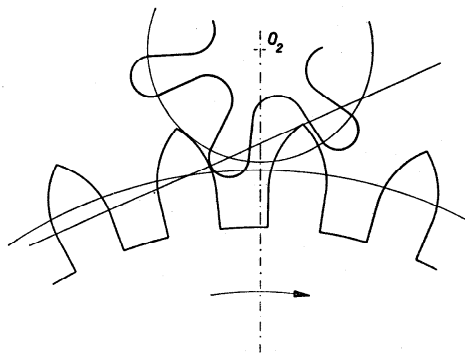


Fig. 188

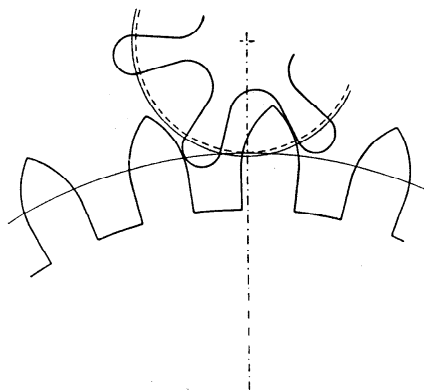


Fig. 189

du pignon (fig. 190). La normale commune aux profils, au point de contact  $C$ , coupe la ligne des centres en un point  $D$  situé à l'intérieur de la circonférence primitive de la roue.

On voit que :

$$M_2 = M_1 \frac{O_2 D}{O_1 D}, \quad M_2 > M_1 \frac{r_2}{r_1},$$

$$M_2 > M_1 \frac{z_2}{z_1}.$$

Les défauts produisant la chute peuvent être : 1° des profils incorrects, en particulier des dents de roues trop longues ; 2° un engrenage trop fort (fig. 191), dans lequel la distance des centres est plus petite que la somme des rayons primitifs des deux roues ; 3° un pignon trop petit ou une roue trop grande (fig. 192).

En somme, l'arc-boutement et la chute sont des défauts contraires ; il y a parfois moyen de corriger l'un par l'autre ; ainsi, lorsque la distance des centres est trop grande, on peut utiliser un pignon trop petit.

beaucoup plus néfaste que le frottement « sortant ».

La chute se produit lorsque le moment de force transmis a une valeur plus grande que la valeur normale. On a donné le nom de chute à ce défaut parce qu'à un moment donné la roue prend un mouvement accéléré jusqu'à ce que la dent suivante tombe sur une aile du pignon. Ce phénomène se produit lors d'un contact incorrect pendant l'arc de retraite, c'est-à-dire lors d'un contact en dehors du cercle générateur

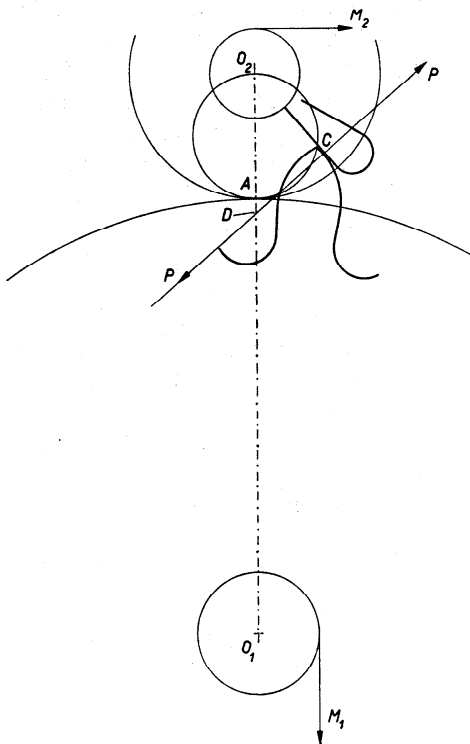


Fig. 190

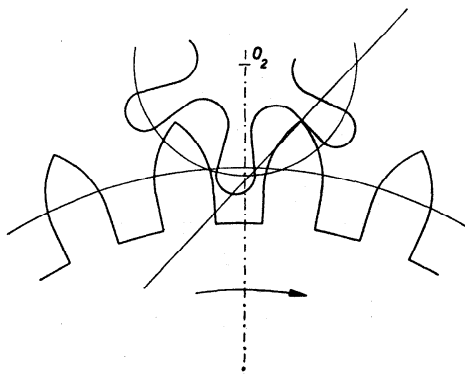


Fig. 191

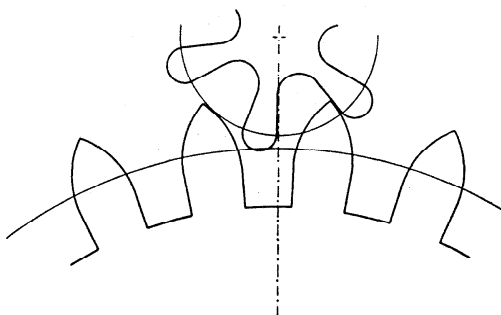


Fig. 192

Il va sans dire que de telles compensations ne sont possibles que s'il s'agit de petits défauts.

Il n'est pas toujours facile de corriger les défauts parce qu'il n'est pas toujours possible de les découvrir sans effectuer des mesures délicates.

Ainsi la même roue peut avoir un diamètre primitif trop petit et un diamètre total exact. Mais le diamètre primitif n'est pas visible.

Dans un rhabillage ou dans une pièce isolée, on peut forger une roue trop petite, passer les roues à la fraise Ingold, remplacer un pignon. Dans la fabrication on ne peut pas se contenter de ces moyens. Le technicien qui a construit le calibre a déterminé les nombres des dents, les modules, les distances des centres, les diamètres primitifs et totaux. Celui qui exécute la pièce a plusieurs moyens à disposition pour s'assurer que l'exécution correspond aux données du technicien : micromètre, machine à projeter les profils, machine à pointer, enregistrement des amplitudes du balancier, etc. A l'aide d'un projecteur de profils, on peut (fig. 193) mesurer les diamètres totaux  $D_1$  et  $D_2$  de la roue et du pignon ainsi que la pénétration  $a$ .

On ne peut pas calculer  $d_1$  et  $d_2$ , les diamètres primitifs. Cependant si l'on a constaté que les formes des dents sont correctes (en les projetant sur un dessin exact), on peut employer les formules :

$$D_1 = m(z_1 + f) = d_1 + mf, \quad d_1 = D_1 - mf.$$

Le facteur  $f$  se trouve dans les tables utilisées par le technicien et le module  $m$  peut se déduire de la distance des centres  $O_1O_2$  :

$$m = \frac{2O_1O_2}{z_1 + z_2}.$$

Dans ces mesures, la plus grande précision est de rigueur, parce que l'erreur tolérée ou non reconnue se manifestera sur un très grand nombre de pièces et pourra s'accroître au cours de la fabrication.

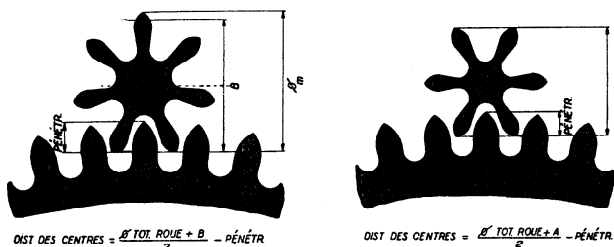


Fig. 193

L'enregistrement des amplitudes des oscillations du balancier est un excellent moyen de déceler la valeur et les défauts d'un engrenage. La courbe des amplitudes ne doit avoir ni maxima ni minima trop accentués. Un maximum correspond à une grande amplitude des oscillations du balancier. S'il est très bien marqué, on peut en déduire qu'à cet instant le moment de force transmis a été trop fort, c'est-à-dire que l'engrenage a de la chute. Le minimum trop marqué est le reflet d'un engrenage à arc-boutement.

**Le cœur des chronographes.** — Dans les chronographes actuellement utilisés, une pression sur un poussoir met en marche l'aiguille supplémentaire des secondes — la trotteuse ; une seconde pression arrête la trotteuse et une troisième la ramène à zéro.

Cette troisième opération se fait au moyen d'un levier actionné par un ressort et d'une came en forme de cœur solidaire de l'axe de la trotteuse.

La forme du « cœur » — c'est ainsi que l'on appelle la came — est choisie de manière qu'elle remplisse certaines conditions. Il faut exiger que la came soit telle que la pression du levier soit toujours suffisante pour ramener l'aiguille à zéro. On désire aussi que la vitesse du cœur pendant le retour à zéro aille en diminuant. On peut aussi demander que les angles de rotation du cœur et du levier soient toujours dans le même rapport.

Dans cette dernière condition, on reconnaît une de celles qui ont été imposées aux profils d'engrenage, afin d'obtenir que le rapport des vitesses angulaires soit constant. Bien que cette dernière condition soit moins importante que les deux premières, c'est elle cependant qui servira ici de point de départ à la détermination d'une forme de cœur qui fut beaucoup employée, mais qui l'est moins actuellement : la spirale d'Archimède.

**La spirale d'Archimède.** — Soit (fig. 194) un arc  $CC$  de spirale d'Archimède dont l'origine est en  $O$ . Le levier de centre  $O_1$  est pressé contre le cœur qu'il touche en  $A$ ; on a :

$$O_1A = O_1O = R.$$

Soit un point  $B$  infiniment voisin de  $A$ . L'équation polaire de la spirale d'Archimède d'origine  $O$  est :

$$\varrho = a\theta, \quad (104)$$

où  $a$  est une constante,  $\varrho$  le rayon vecteur et  $\theta$  l'angle décrit depuis l'origine.

Quand le cœur tourne dans le sens de la flèche de l'angle  $d\theta$ , le levier est repoussé de l'angle  $d\varphi$ . On a :

$$OA = \varrho, \quad OB = \varrho + d\varrho, \\ AD = d\varrho = R d\varphi.$$

Mais  $d\varrho = a d\theta$ . Donc :

$$a d\theta = R d\varphi \\ d\theta = \frac{R}{a} d\varphi.$$

L'angle  $d\theta$  est proportionnel à  $d\varphi$ ,  
puisque  $\frac{R}{a}$  est constant.

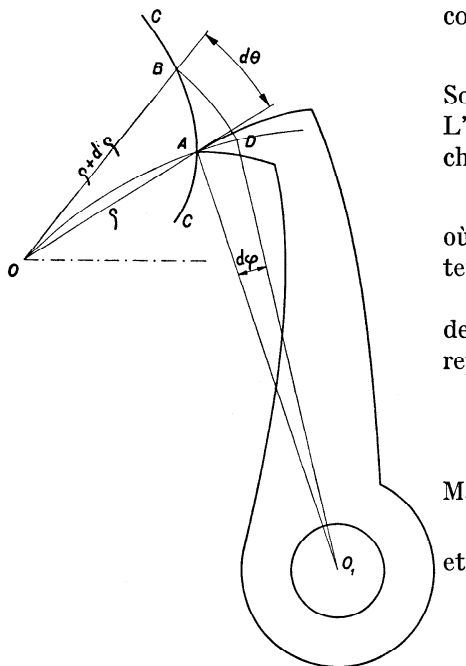


Fig. 194

**La force motrice actionnant le cœur.** — Soit  $P$  la pression avec laquelle le levier est appuyé en  $A$  (fig. 195) contre le profil  $CC$  du cœur; elle agit suivant  $AO$  si  $O$  est le point de pivotement du cœur. La composante  $F$ , normale au profil, vaut  $F = P \sin \alpha$ , si  $\alpha$  désigne l'angle de la tangente à  $CC$  en  $A$  et du rayon vecteur  $OA$ .

Il ne suffit pas que  $F$  ne soit pas égale à zéro; elle doit passer au-dessus de  $O$ , à une distance assez grande pour que son moment fasse tourner la came dans le sens de la flèche; ce moment doit être assez grand pour vaincre les résistances passives, les frottements, et pour

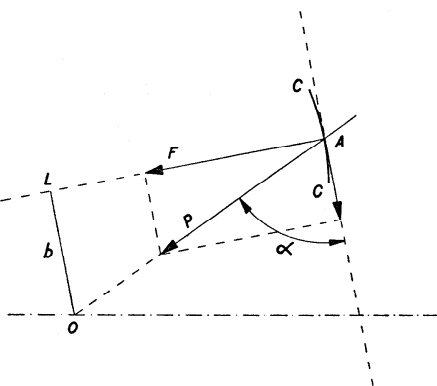


Fig. 195



donner au cœur une certaine accélération. Le mouvement du cœur dépend du moment de  $F$ , c'est dire que :

$$M = Fb = Pb \sin \alpha. \quad (105)$$

Pour que le mouvement du cœur soit retardé, il faut que  $M$  diminue en même temps que le rayon vecteur. Voyons ce qu'il en est dans la spirale d'Archimède.

Dans la figure 196,  $AB$  est un arc infiniment petit de la spirale d'Archimède  $CC$ . Faisons  $OD = OA$ . L'angle  $\alpha$  formé par la tangente

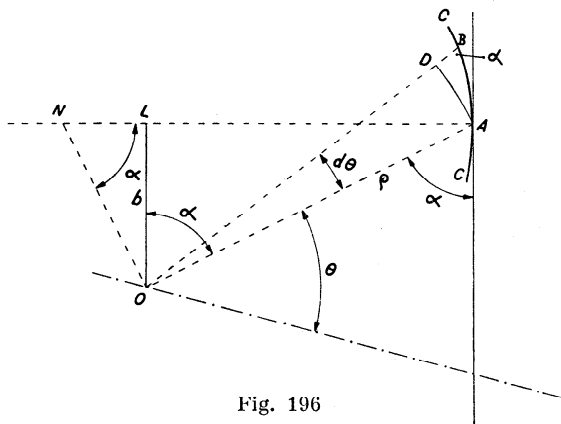


Fig. 196

et le rayon vecteur est aussi l'angle  $ABD$  du triangle  $ABD$  que nous pouvons considérer comme rectiligne, puisqu'il est infiniment petit. Nous avons :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{DA}{DB} = \frac{a d\theta}{a\theta} = \frac{a d\theta}{a\theta} = \theta.$$

L'angle  $\alpha$  est donc variable ; il passe de 0 à  $\frac{\pi}{2}$  quand  $\theta$  passe de 0 à  $\infty$ .

Dans l'expression du moment  $M$ , le facteur  $\sin \alpha$  peut varier de 0 à 1. La force  $F$  et son moment  $M$  sont variables et la variation est dans le sens que nous désirons :  $F$  et  $M$  sont plus grands à l'extrémité du cœur qu'à l'origine.

A l'origine :

$$\theta = 0, \quad \operatorname{tg} \alpha = 0, \quad \alpha = 0, \quad \sin \alpha = 0,$$

donc :

$$M = 0.$$

Dans un cœur de chronographe  $\theta$  varie de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ . Pour  $\theta = \frac{\pi}{2}$ ,  $\text{tg } \alpha = \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha \cong 57^\circ 30'$ .

Examinons la valeur de  $b$ ; soit (fig. 196)  $AN$  la normale à la spirale en  $A$ ,  $ON$  la perpendiculaire à  $AO$ . Dans le triangle  $AON$ :

$$ON = \frac{\varrho}{\text{tg } \alpha} = \frac{\varrho}{\theta} = a.$$

Dans la spirale d'Archimède, la sous-normale a une valeur constante. Nous avons:

$$b = ON \sin \alpha = a \sin \alpha,$$

de sorte que le moment  $M$  a pour valeur:

$$M = P a \sin^2 \alpha.$$

Dans la spirale d'Archimède, le moment croît avec  $\alpha$ , c'est-à-dire avec le rayon vecteur, mais la variation de  $M$  est assez grande.

**La spirale logarithmique.** — Actuellement, on utilise la spirale logarithmique dont l'équation polaire est:

$$\varrho = a e^{m\theta}, \quad (106)$$

qu'on peut écrire:

$$\theta = \frac{1}{m} (\ln \varrho - \ln a), \quad (106)$$

où  $\ln \varrho$  désigne le logarithme naturel de  $\varrho$ ,  $a$  et  $m$  des constantes.

D'après la figure 196, on a:

$$\text{tg } \alpha = \frac{DA}{DB} = \frac{\varrho d\theta}{d\varrho}.$$

De l'équation de la spirale logarithmique, on déduit:

$$d\theta = \frac{1}{m} \frac{d\varrho}{\varrho},$$

d'où:

$$\text{tg } \alpha = \frac{1}{m} \frac{d\varrho}{\varrho} \frac{\varrho}{d\varrho} = \frac{1}{m}.$$

Dans la spirale logarithmique, l'inclinaison de la tangente sur le rayon vecteur est constante. Il s'ensuit que la composante normale  $F$  de la pression l'est aussi, puisque  $F = P \sin \alpha$ . Mais il importe de voir si le moment de  $F$  par rapport à  $O$  est constant ou non. Dans la figure 196, on a :

$$ON = \frac{\varrho}{\operatorname{tg} \alpha} = \varrho m, \quad b = OL = ON \sin \alpha,$$

$$b = \varrho m \sin \alpha = \varrho m \sqrt{\frac{1}{1 + m^2}} = \varrho \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{m^2}}}.$$

Le bras de levier  $b$  est directement proportionnel au rayon vecteur, donc le moment  $M$  de la force  $F$  actionnant le cœur augmente en même temps que  $\varrho$ . La valeur de  $M$  est :

$$M = P \sin \alpha \cdot \varrho \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{m^2}}}. \quad (107)$$

**Construction du cœur.** — Pour dessiner un cœur de chronographe en forme de spirale logarithmique, il faut connaître deux facteurs : le plus grand rayon vecteur qui mesure l'encombrement et l'angle  $\alpha$  qui doit assurer la fonction correcte du cœur.

Posons  $\varrho_{\max.} = r$  et cherchons l'équation de la spirale logarithmique.

Dans notre cas, le rayon vecteur maximum correspond à  $\theta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ .

Nous avons :

$$r = a e^{m \frac{\pi}{2}}$$

ou

$$m \frac{\pi}{2} = \ln r - \ln a. \quad (108)$$

D'autre part :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{m}. \quad (109)$$

Nous admettrons pour  $a$  une valeur telle que d'après l'équation (107) la valeur de  $M$  soit suffisante.

Les équations (108) et (109) permettent de calculer les constantes  $a$  et  $m$ . Nous obtenons :

$$m = \cotg \alpha,$$

soit :

$$a = \frac{r}{e^{\frac{\pi}{2} \cotg \alpha}}.$$

L'équation de la spirale logarithmique pour  $\varrho_{\max.} = r$  et pour un angle donné  $\alpha$  est :

$$\varrho = \frac{r}{e^{\frac{\pi}{2} \cotg \alpha}} e^{\theta \cotg \alpha}.$$

Supposons que  $\alpha = 30^\circ$ ; alors  $e^{\frac{\pi}{2} \cotg \alpha} = 15,191$  et  $\cotg \alpha = 1,7321$ . L'équation de la spirale devient :

$$\varrho = \frac{r}{15,191} e^{1,7321 \theta}.$$

Puisque  $\varrho$  est proportionnel à  $r$ , il suffit de calculer une fois pour toutes les valeurs de  $\varrho$  pour  $r = 1$  et pour différents angles  $\theta$ ; en utilisant l'équation :

$$\varrho = 0,065\,829 e^{1,7321 \theta},$$

nous obtenons le tableau suivant :

| $\theta$                     | $\varrho$ |
|------------------------------|-----------|
| 0                            | 0,065 829 |
| $\frac{\pi}{12} = 15^\circ$  | 0,103 597 |
| $\frac{\pi}{6} = 30^\circ$   | 0,163 03  |
| $\frac{\pi}{4} = 45^\circ$   | 0,256 57  |
| $\frac{\pi}{3} = 60^\circ$   | 0,403 77  |
| $\frac{5\pi}{12} = 75^\circ$ | 0,635 43  |
| $\frac{\pi}{2} = 90^\circ$   | 1         |

En portant sur 01, 02, 03, 04, etc... les valeurs correspondantes de  $\varrho$ , nous obtenons les points A, B, C, D, etc... de la spirale logarithmique cherchée.

Pour dessiner la courbe avec plus de sécurité, il convient de tracer les tangentes aux points A, B, C, ..., de sorte que ces tangentes fassent avec le rayon vecteur un angle de  $30^\circ$  (fig. 197).

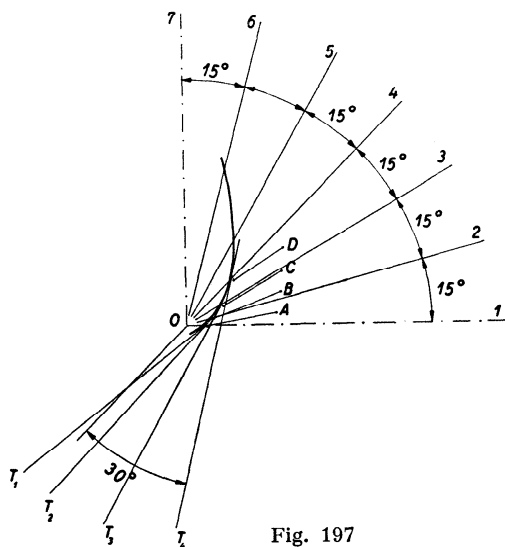


Fig. 197



## TABLE DES MATIÈRES DU TOME PREMIER

|  |     |
|--|-----|
| AVANT-PROPOS, par Ed. Primault, président de la Chambre suisse de l'horlogerie . . . . .               | VII |
| AVERTISSEMENT de l'Association des directeurs des Ecoles suisses d'horlogerie et de l'auteur . . . . . | IX  |
| PRÉFACE, par A. Jaquerod, directeur du Laboratoire suisse de recherches horlogères . . . . .           | XV  |

### THÉORIE GÉNÉRALE DE L'HORLOGERIE

|  |    |
|--|----|
| CHAPITRE I. — GRANDEURS, UNITÉS, SYMBOLES . . . . .  | 3  |
| <p>Grandeurs, 1. — La mesure en général, 1. — Définition de l'unité, 2. — Précision des mesures, 2. — L'erreur absolue, 3. — Erreurs systématiques et erreurs accidentelles, 3. — L'erreur relative, 4. — Ecart et tolérances, 4. — Système cohérent ou absolu d'unités, 5. — Le système métrique international, 6. — Systèmes d'unités utilisés, 6. — Equation aux dimensions d'une grandeur, 10. — Problème du changement d'unités, 11. — Homogénéité des formules, 13. — Les unités géométriques et mécaniques des systèmes C.G.S. et M.Kf.S., 15. — Définition des principales unités, 17. — Nécessité des unités secondaires, 25. — Les unités secondaires des systèmes C.G.S. et M.Kf.S., 27. — Tableaux comparatifs des principales unités, 34. — Choix d'un système d'unités, 36. — Introduction du système d'unités Giorgi, 38.</p> |    |
| CHAPITRE II. — LE TEMPS . . . . .  | 41 |
| <p>La mesure du temps, 41. — Rappel de quelques notions de cosmographie, 41. — Les coordonnées terrestres, 42. — Position d'un corps céleste, 42. — Les coordonnées équatoriales, 43. — Les coordonnées écliptiques, 44. — Périhélie et aphélie, 44. — Les unités de temps, 45. — Le jour, 45. — Le jour sidéral, 45. — Le jour solaire vrai et le jour solaire moyen, 46. — L'équation du temps, 47. — Calcul et représentation graphique de l'équation du temps, 48. — Les différents temps, 50. — Transformation du temps solaire vrai en temps solaire moyen et inversement, 52. — Trans-</p>  |    |

formation du temps moyen en temps sidéral et inversement, 53. — Transformation des angles en heures, minutes et secondes, 54. — La détermination des longitudes au moyen des chronomètres, 55. — Inconvénients de la numération actuelle des angles et du temps, 59. — Notation décimale des angles, 60. — Notation décimale du temps, 61. — Application de la notation décimale des angles et du temps, 62. — Le calendrier, 63. — Le calendrier julien, 63. — Le calendrier grégorien, 63. — La réforme du calendrier, 64.

### CHAPITRE III. — FONCTIONS GÉNÉRALES DES PENDULES ET DES MONTRES . . . . .

67

Les moyens de mesurer le temps, 67. — Phénomènes périodiques, 67. — Les oscillations du pendule, 68. — Les fonctions diverses d'un mouvement de pendule, 69. — L'organe régulateur des pendules, 71. — L'organe régulateur des montres, 73. — L'échappement, 75. — Le rouage, 76. — La force motrice, 77. — Les organes du remontage, 78.

### CHAPITRE IV. — LA FORCE MOTRICE . . . . .

81

Force motrice ou force d'entretien des oscillations du pendule ou du balancier, 81. — Le poids simple, 85. — Le poids mouflé, 86. — Le remontage à ressort auxiliaire, 87. — Le remontage à corde sans fin de Huygens, 88. — Le travail du poids en un temps donné, 89. — Le ressort et l'élasticité, 90. — La loi de Hooke, 91. — Le module d'élasticité, 92. — Détermination expérimentale de  $E$ , 93. — Variation du module d'Young avec la température, 95. — Traction et flexion, 97. — Moment élastique d'un ressort de section symétrique par rapport au plan neutre, enroulé à l'une de ses extrémités et attaché à l'autre, 98. — Moment d'inertie d'une surface, 101. — Moment d'inertie d'un rectangle, 103. — Moment d'inertie d'un cercle, 103. — Section rectangulaire à bouts arrondis, 104. — Le moment élastique exprimé en fonction du nombre de tours, 105. — Détermination expérimentale du moment élastique, 107. — Le dynamomètre, 108. — Le diagramme du ressort, 110. — Le rendement du ressort, 113. — Les facteurs qui influencent le rendement d'un ressort, 114. — Supériorité de la méthode expérimentale, 115. — Examen du diagramme, 116. — Le développement concentrique du ressort. Les brides, 118. — Modes d'attache du ressort au barillet, 120. — Déformation permanente des ressorts, 120. — Utilisation rationnelle du développement du ressort, 123. — L'encliquetage, 126. — La rupture des ressorts, 128. — Le nombre de tours de développement du ressort, 133. — Le développement maximum, 134. — Calcul de l'épaisseur du ressort, 137. — Insuffisance de la solution théorique, 139. — Egalisation du moment élastique du ressort, 140. — La fusée, 142. — L'entretien de la force motrice pendant le remontage, 143. — Forme de la fusée, 143.



## CHAPITRE V. — LE ROUAGE. RAPPORT DES VITESSES ET NOMBRES

DE DENTS . . . . . 147

Rappel des fonctions du rouage, 147. — Transmission du mouvement d'un arbre à un autre, 147. — Les roues dentées : le rayon primitif et le pas, 149. — La vitesse imposée à certaines roues d'un rouage de montre ou de pendule, 150. — Calcul des nombres de dents du barillet et du pignon des minutes, 151. — Rapport des vitesses angulaires dans un train d'engrenages, 152. — Engrenage barillet-pignon des minutes dans la montre 8 jours, 153. — Engrenage de la roue motrice (barillet) et du pignon des minutes dans une horloge à poids, 155. — Calcul d'un rouage compteur, 156. — Le nombre d'alternances du balancier, 157. — Calcul du rouage compteur d'une montre ordinaire, 159. — Formule générale pour  $A_h$ , 160. — La montre Roskopf, 161. — Calcul du rouage d'une montre Roskopf simple, 161. — La minuterie, 162. — Minuterie de la montre Roskopf, 165. — Le train de renvois, 166. — Rouage de mise à l'heure des montres, 166. — Rouage du remontoir, 167. — Indicateur du développement du ressort dans les montres à fusée, 168. — Le rouage de sonnerie des horloges, 169. — Rouage dont le rapport des vitesses est une fraction irréductible formée de grands nombres, 171. — Rappel des propriétés des fractions continues, 174. — Application au filetage, 175. — Les engrenages différentiels, 176. — Les engrenages différentiels plans, 176. — Exemple numérique, 178. — L'indicateur de développement du ressort dans les montres sans fusée, 179. — Engrenage différentiel sphérique, 181. — Réalisation de rapports complexes au moyen d'engrenages différentiels sphériques, 182. — Exemple numérique, 183. — Solution du même problème au moyen des engrenages différentiels plans, 184.

## CHAPITRE VI. — TRANSMISSION DE L'ÉNERGIE PAR LES ROUES

DENTÉES . . . . . 187

Le module, 187. — La transmission de l'énergie, 189. — Contact en dehors de la ligne des centres, 190. — Transmission de la vitesse, 191. — Détermination des profils : méthode graphique, 193. — Méthode de Reuleaux, 195. — Méthode des enveloppes, 195. — Méthode des roulettes, 196. — Propriétés de la cycloïde, 197. — Construction de la cycloïde, 200. — Propriétés de l'épicycloïde, 201. — Cycloïde et épicycloïde, 203. — Construction de l'épicycloïde, 205. — Propriétés de l'hypocycloïde, 205. — Un cas particulier de l'hypocycloïde, 206. — La développante de cercle, 207. — Détermination des profils de l'engrenage épicycloïdal, 208. — Le jeu et la formation des dents, 210. — La ligne d'engrènement dans l'engrenage épicycloïdal, 213. — Calcul du rayon total de la roue, 215. — Calcul numérique de l'angle  $\gamma$ , 216. — Méthode de Schouffelberger pour calculer le rayon total de la roue, 219. — L'angle de

conduite, 220. — Table de Schouffelberger pour les angles de conduite du pignon dans les engrenages d'horlogerie, 221. — Autre forme de l'équation pour le rayon total, 222. — Tables pour les diamètres totaux des roues, 222. — Forme des dents des pignons, 224. — Calcul des diamètres totaux des pignons à denture demi-circulaire, 225. — Les diamètres totaux des pignons à saillies ogivales, 228. — Mesure des diamètres totaux des roues et des pignons, 231. — Le contrôle de la forme des dents, 234. — Les tables pour les calculs d'engrenages, 235. — Insuffisance de la solution théorique, 236. — Comparaison entre les moments de force transmis avant et après la ligne des centres, 240. — La conduite par le pignon, 241. — Le frottement, 242. — Le frottement de roulement, 245. — Le rôle des lubrifiants, 245. — Les huiles pour l'horlogerie, 247. — Le frottement des corps enduits, 248. — Les solutions approchées du problème des profils, 251. — Méthode expérimentale pour reconnaître la valeur des profils, 252. — Etude graphique de la transmission de la force dans les engrenages, 254. — Etude graphique du frottement, 257. — Ecart et tolérances, 258. — La normalisation, 258. — Engrenages spéciaux, 260. — Les roues de la minuterie et de la mise à l'heure, 260. — Les roues de la minuterie et le module, 262. — La crémaillère, 264. — L'engrenage du rochet et de la couronne, 266. — Les roues coniques, 267. — Construction d'un engrenage conique, 270. — L'engrenage à lanterne ou à fuseaux, 272. — L'engrenage à développante, 273. — Influence de l'angle d'inclinaison de la génératrice, 274. — L'interférence dans les engrenages à développante, 277. — Avantages et inconvénients de l'engrenage à développante, 280. — Le frottement des pivots, 283. — Le frottement d'un pivot horizontal, 283. — Le frottement d'un pivot vertical à portée, 284. — Le frottement d'un pivot vertical sans portée, 286. — La pression latérale, 287. — Le rendement dans les engrenages, 290. — Le rendement de l'engrenage épicycloïdal à flancs droits, 292. — Le rendement de l'engrenage à développante, 295. — Détermination expérimentale du rendement d'un engrenage, 298. — Les défauts dans les engrenages, 301. — Le cœur des chronographes, 305. — La spirale d'Archimède, 306. — La force motrice actionnant le cœur, 306. — La spirale logarithmique, 308. — Construction du cœur, 309.

ACHEVÉ D'IMPRIMER  
POUR LE COMPTE DE LA  
CHAMBRE SUISSE DE L'HORLOGERIE,  
A LA CHAUX-DE-FONDS,  
SUR LES PRESSES DE  
L'IMPRIMERIE CENTRALE S. A.,  
A NEUCHÂTEL,  
LE 28 OCTOBRE 1950.

